Бямба, 2017 оны 12 сарын 9

Сорил

Бодлого 1. 2017^2 ширхэг нэгж нүднээс тогтох 2017×2017 хүснэгт өгөгдөв. Нэгж нүд бүр яг 1 ширхэг будагдсан талтай байхаар хамгийн ихдээ хэдэн ширхэг нэгж урттай талыг будаж болох вэ?

Бодлого 2. ABC $(AB < AC)$ гурвалжны багтсан тойргийн төвийг I, багтаасан тойргийн төвийг O гэе. I цэгийн BC шулууны хувьд тэгш хэмтэй байрлах цэгийг I' гэе. AI биссектрис BC талыг D, багтаасан тойргийг E цэгт огтолдог. EI' шулууны багтаасан тойрогтой огтлолцох цэгийг F гэвэл

1. $AO \cdot II' = AI \cdot IE$,
2. I, O, E ба F цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг

тус тус батал.

Бодлого 3. Эхний 10 гишүүн нь хос хосоороо харилцан анхны байх эерэг бүхэл гишүүдтэй арифметик прогрессын 100 дахь гишүүний авч болох хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого 4. Үржвэр нь 1 байх эерэг бодит a, b, c, d тоонууд өгөгдөв.

$$(a^2b + b^2c + c^2d + d^2a)(ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \geq (a + c)(b + d)(ac + bd + 2)$$

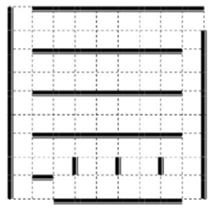
болохыг батал.

Бодох хугацаа: 4 цаг
Үнэлгээ: Бодлого бүр 7 оноотой

Бодолт. Будагдсан нэгж урттай талын тоог x, гадна хүрээн дээрх тоог y гэе. Нэгж нүд бүр яг 1 ширхэг будагдсан талтай учраас $0 \le y \le 4 \cdot 2017 - 4$. Мөн түүнчлэн хүрээн дээрх y ширхэг нэгж урттай тал бүр 1 ширхэг нэгж квадратын тал, харин бусад $x - y$ ширхэг нэгж урттай тал бүр 2 ширхэг нэгж квадратын тал болох тул $y + 2(x - y) = 2017^2$. Иймд $x = (2017^2 + y)/2$ болох тул

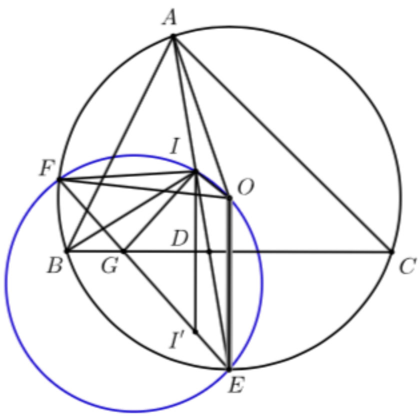
$$x \le \left[\frac{2017^2 + 4 \cdot 2017 - 4}{2}\right].$$

Доорх зурагт x хамгийн их утгаа авах байгуулалтыг 9×9 жишээн дээр үзүүлэв.



Бодолт. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг r, багтаасан тойргийн радиусыг R гэе. $\angle IBE = \angle A/2 + \angle B/2 = \angle BIE$ тул $IE = EB = 2R\sin(\angle A/2)$. Иймд $AI = r/\sin(\angle A/2)$ байх учраас $AI \cdot IE = 2Rr = AO \cdot II'$.

II' ба OE хэрчмүүд BC талд перпендикуляр тул $\angle I'IE = \angle AEO = \angle IAO$. Мөн $AI/AO = II'/IE$ гэдгээс $\triangle IAO \cong \triangle I'IE$ болох буюу $\angle FEA = \angle IOA$. Иймд $\angle FEA = \angle FOA/2$ тул $\angle FEA = \angle FOI$ болж I, O, E ба F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.



Бодолт. n ба d нь харилцан анхны натурал тоонууд болог. Тэгвэл $d, 2d, \ldots, nd$ тоонуудыг n-д хуваахад бүгд ялгаатай үлдэгдэл өгнө гэдгийг хялбархан ажиглаж болно.

100 дахь гишүүн нь ХБ утгатай байх арифметик прогрессын ялгаврыг d гэе. Хэрэв $(d, 2) = 1$ бол дээрх ажиглалтаас арифметик прогрессын эхний 4 гишүүн дотор 2-т хуваагдах 2 гишүүн олдох болж зөрчил гарна. Иймд d ялгавар тэгш тоо юм. Мөн адил сэтгэлгээгээр d ялгавар 3 ба 5-д хуваагдана гэж дүгнэж болох тул $d \ge 30$ байна.

Иймд $a_1 = 1$, $d = 30$ байх арифметик прогрессын эхний 10 гишүүн хос хосоороо харилцан анхны байвал 100 дахь гишүүн ХБ утгаа авна. $1 \le i < j \le 10$ үед

$$(a_i, a_j) = (a_i, (j-i)d) = (1 + 30(i-1), j-i)$$

тул $(a_i, a_j) = 1$ эсвэл 7 байх боломжтой. Хэрэв $(a_i, a_j) = 7$ бол $j - i = 7$ ба $1 + 30i \equiv 0 \pmod 7$ байх бөгөөд сүүлийн тэгшитгэлээс $i = 3$ болох тул эхний адилтгал биелэх боломжгүй. Иймд энэ прогрессын эхний 10 гишүүн хос хосоороо харилцан анхны юм. Иймд $a_{100} = 1 + 30 * 99 = 2971$.

Бодолт. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр

$$(a^2b + c^2d + d^2a + b^2c)(da^2 + bc^2 + ab^2 + cd^2) \geq (a^2\sqrt{bd} + c^2\sqrt{bd} + abd + cbd)^2.$$

Дөрвөн тооны үржвэр 1 гэдгээс $a^2\sqrt{bd} + c^2\sqrt{bd} = (a^2 + c^2)/\sqrt{ac} \geq a + c$ болох тул

$$(a^2b + c^2d + d^2a + b^2c)(da^2 + bc^2 + ab^2 + cd^2) \geq (a + c)^2(1 + bd)^2.$$

Мөн тэгш хэмтэйгээр

$$(a^2b + c^2d + d^2a + b^2c)(da^2 + bc^2 + ab^2 + cd^2) \geq (b + d)^2(1 + ac)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэнэ. Эдгээр тэнцэтгэл бишийг үржүүлвэл

$$(a^2b + c^2d + d^2a + b^2c)(da^2 + bc^2 + ab^2 + cd^2) \geq (a + c)(b + d)(1 + ac)(1 + bd)$$

болох бөгөөд $(1 + ac)(1 + bd) = ac + bd + 2$ байна гэдгээс бодлого бодогдоно.

Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш тэнцэтгэлдээ хүрэх нөхцлөөс $a = c = t$, $b = d = 1/t$ $(t > 0)$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.