Овог: Батсүх
Нэр: Торбат
анги: 12 б
Сургууль: Орчлон.

1 − 7
2 − 4
3 − 0

Σ = 11

I сорил.

A1. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=k \quad a_1 a_2 \ldots a_n = M$.

Эерэг бодъё $\Rightarrow \forall x,\ x>0$-ийн хувьд

$M(x+1)^k < (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$ гэж харуулвал бодлого батлагдана.

$\Rightarrow$ Хоёр талыг эерэг М-д хуваая ($M>1 \Rightarrow M\neq 0$)

$(x+1)^k < \frac{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ гэвэл батлагдана.

$\frac{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \left(\frac{x}{a_1}+1\right)\left(\frac{x}{a_2}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{a_n}+1\right)$ юм.

харин $(x+1)^k = (x+1)^{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)} = (x+1)^{\frac{1}{a_1}}(x+1)^{\frac{1}{a_2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_3}}\ldots\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_n}}$ юм $\Rightarrow$

$(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \le \left(\frac{x}{a_i}+1\right)$ гэж баталъя ($a_i \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow a_i = 1$ үед $(x+1)^1 = \left(\frac{x}{1}+1\right)$ болно.

Одоо $a_i > 1$ гэе $\Rightarrow$

$(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \ \left(\frac{x}{a_i}+1\right)$ $\quad x+1$ − эерэг $\quad a_i$ − нь натурал тул хоёр талыг a_i − зэрэгт дэвшүүлье.

$x+1,\ \left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i}$ $\quad \left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i} \underline{\text{бином}} \left(\frac{x}{a_i}\right)^{a_i} + C_{a_i}^{a_i-1}\frac{x}{a_i}^{a_i-1} + \ldots + \underline{C_{a_i}^{1}\frac{x}{a_i}+1}$

$\Rightarrow C_{a_i}^{1}\frac{x}{a_i} = x \Rightarrow$ ~~харин~~ $a_i>1$ тул энэ биномоос задаргааны

сүүлийн 2 гишүүний нийлбэр $x+1$ болоод бусад нь эерэг байна $\Rightarrow$

харин $a_i>1$ бол $\left(\frac{x}{a_i}+1\right)^{a_i} > (x+1) \Rightarrow M>1$ тул ямар нэг $a_i>1$ байх

тул ~~$(x+1)^{\frac{1}{a_1}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_2}}\cdot\ldots\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_n}} < \left(\frac{x}{a_1}+1\right)$~~ $\left(\frac{x}{a_2}\right.$

$(x+1)^{\frac{1}{a_i}} < \left(\frac{x}{a_i}+1\right)$ − байх a_i байна $\Rightarrow$

$\left(\frac{x}{a_1}+1\right)\left(\frac{x}{a_2}+1\right)\cdot\left(\frac{x}{a_n}+1\right) > (x+1)^{\frac{1}{a_1}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_2}}\ldots\cdot(x+1)^{\frac{1}{a_n}}$ болоод ▲

✓7

A2. $\underset{*}{1}\ \underset{*}{2}\ \underset{*}{3}\ \dots\ \dots\ \underset{*}{3n}$ – Тоогоо байрлал нь 1-ээс 3n гэе =)

a-гийн дугааруудын нийлбэр X
b-гийн дугааруудын нийлбэр Y гэе. =) a, b, c – Тэгш эрхтэй тул
c-гийн дугааруудын нийлбэр Z

$X \geq Y \geq Z$ гэе.

$\Rightarrow X+Y+Z = \dfrac{3n(3n+1)}{2} \Rightarrow 3X \geq \dfrac{3n(3n+1)}{2} \Rightarrow$

$X \geq \dfrac{n(3n+1)}{2}$ мөн

адил $Z \leq \dfrac{n(3n+1)}{2}$ болно.

=) одоо энэ хамгийн урт $\dfrac{3n^2}{2}$ үйлдэл хийж дээрх үйлдлээр $\underbrace{aa..a}_{n}\underbrace{bb..b}_{n}\underbrace{cc..c}_{n}$ –

гэж хамгийн урт өгч чадахгүй үзүүлье.

Мэдээж хоёр адилхан үсгийн үйлдэл хийвэл юу ч өөрчлөгдөхгүй тул
хоёр өөр үсгээр л үйлдэл хийнэ.

$ab \to ba$ гэсэн үйлдэл x_1 удаа =) X-1-ээр ихэсгэж Y-1-ээр багасна
$ba \to ab$ гэсэн үйлдэл x_2 удаа =) X-1-ээр багасч Y-1-ээр ихэсгэнэ
$ac \to ca$ гэсэн үйлдэл x_3 удаа =) X-1-ээр ихэсгэж Z-1-ээр багасна
$ca \to ac$ гэсэн үйлдэл x_4 удаа =) X-1-ээр багасч Z-1-ээр ихэснэ.
$bc \to cb$ гэсэн үйлдэл x_5 удаа =) Y-1-ээр ихсэж Z-1-ээр багасна
$cb \to bc$ гэсэн үйлдэл x_6 удаа =) Y-1-ээр багасч Z-1-ээр ихэснэ =)

$x + x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ =) $X \geq \dfrac{n(3n+1)}{2}$ =)

$y + x_2 + x_5 - x_1 - x_6 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\quad Y \leq \dfrac{n(3n+1)}{2}$

$z + x_4 + x_6 - x_3 - x_5 = \dfrac{n(5n+1)}{2}$

$x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \geq n^2$ Бид $x_1 + x_2 + \dots + x_6 \geq \dfrac{3n^2}{2}$ гэж батлах ёстой тул

$x_4 + x_6 - x_3 - x_5 \geq n^2$

$x_2 + 2x_4 + x_6 - x_1 - 2x_3 - x_5 \geq 2n^2$ =) Хэрэв $x_4 \leq \dfrac{n^2}{2}$ бол батлагдана (Хасаад нэмэх)

(мөн $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $x_4 \geq 0$ $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$ тул)

=) $x_4 > \dfrac{n^2}{2}$ гэе =) $ca \to ac$ гэсэн үйлдэл $\dfrac{n^2}{2}$-оос их удаа болсон =)

[Үргэлжлэл дараагийн цаасан дээр]

овог: Баатархүү
Нэр: Төрбат
Сургууль: Орхон
анги: 12б

Одоо x_1, x_3, x_5 - нь эхний хоорондын утгууд тул бүгдийг нь 0 гэж үзье $\Rightarrow$ $x - x_2 - x_4 = \frac{n(n+1)}{2}$ — гэж y-бол хасаж хаявя.

$$z + x_4 + x_6 = \frac{n(5n+1)}{2}$$ гэж үзье. $\Rightarrow$

Одоо эсрэгээр нь $\frac{3n^2}{2}$ - оос бага утгатай хэмээх гэж үзье.

$x_2 + x_4 + x_6 < \frac{3n^2}{2} \Rightarrow$

$x_2 + x_4 < \frac{3n^2}{2} \Rightarrow$ $\quad x - x_2 - x_4 = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(4n+1)}{2} > x \geq \frac{n(3n+1)}{2} \Rightarrow$

харин $x_4 + x_6 < \frac{3n^2}{2}$ $\quad z + x_4 + x_6 = \frac{n(5n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(3n+1)}{2} > z > \frac{n(2n+1)}{2}$

$x - z < n^2 \Rightarrow z - x > -n^2$ $\quad 2x_4 + x_6 + x_2 < 3n^2 \Rightarrow$

$z - x + 2x_4 + x_6 + x_2 = 2n^2 \Rightarrow$

$x_4 > \frac{n^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_6 + x_2 < 2n^2$

Одоо $x_4 > \frac{n^2}{2} \Rightarrow$ $\quad ca \to ac$ гэж утга $\frac{n^2}{2}$ -оос их үзэх

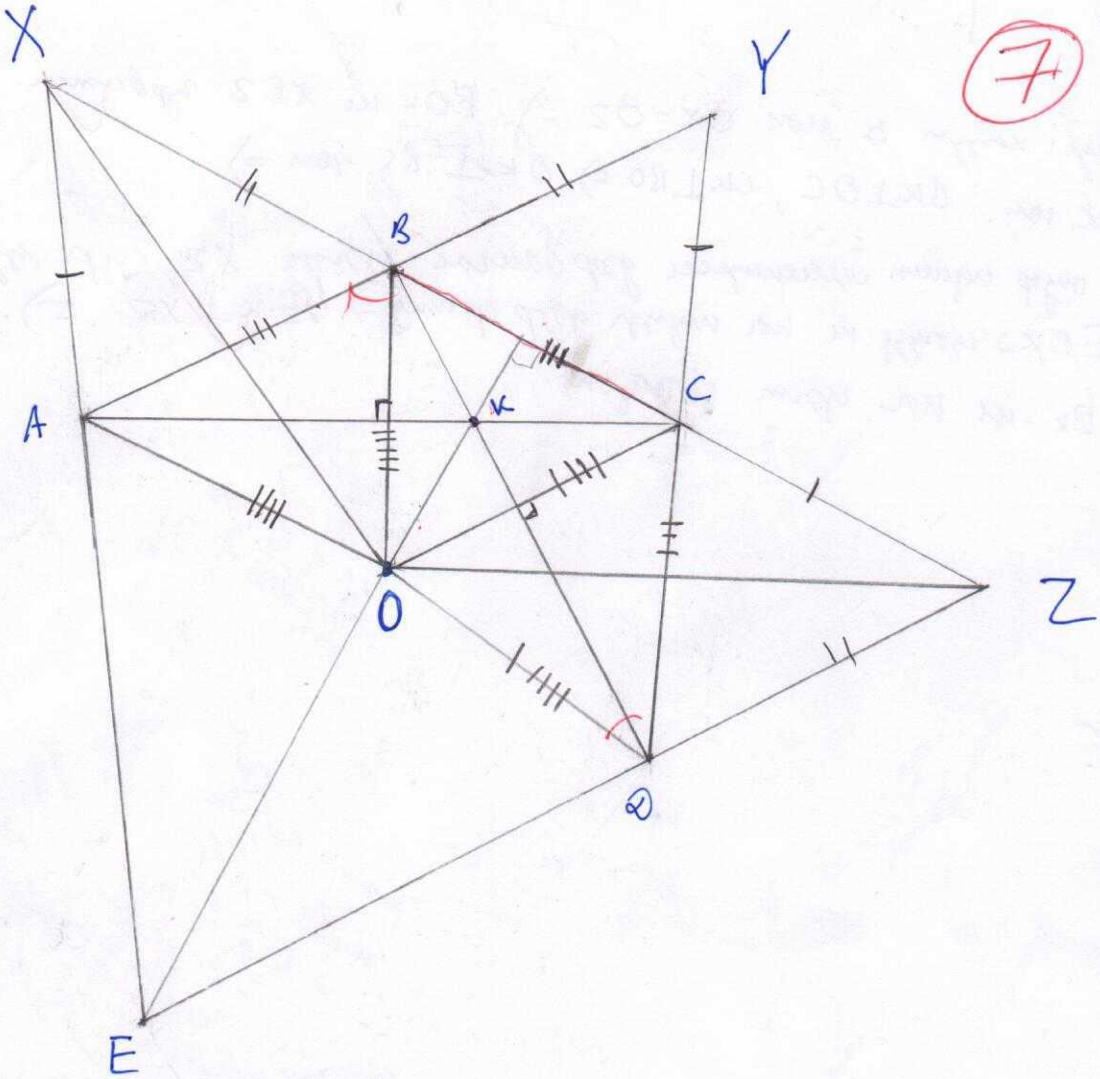
$\Rightarrow$ бүх a - нууд байрандаа 0 гэх гэж дор хаяж n^2 хэмжээ $\Rightarrow$ бүх a - нууд байрандаа 0 гэх гэж дор хаяж n^2 хэмжээ

уншиж гарах тул. Одоо бүх c - байрандаа очих гэж $\frac{n^2}{2}$ утга гарна $\Rightarrow$ $n^2 + \frac{n^2}{2} = \frac{3n^2}{2}$ дор хаяж $\frac{3n^2}{2}$ удаа үйлдэл хийх

овог: Батужин
Нэр: Төрбат.
Сургууль: Орчлон
анги: 12б.

B1.

7



AE, BC-гийн огтлолцол цэг X,
BC, ED-гийн огтлолцол цэг Z,
AB, CD-гийн огтлолцол цэг Y гэе. $\Rightarrow$

$\measuredangle EAB = \measuredangle BCD$

$\measuredangle EAC = \measuredangle ACD$, $\measuredangle BAC = \measuredangle BCA \Rightarrow \measuredangle XAY = \measuredangle XCY \Rightarrow$ ~~XXX~~ ~~XXXY~~ $AXYC$-г ил тойрог.

Мөн $AB = BC \Rightarrow XB \times BC = AB \times BY$ байх ёстой тул $AXYC$ нь адил хажуут ~~б~~ трапец болох $AX = CY$

Мөн адилаар $\measuredangle CBA = \measuredangle EDC \Rightarrow \measuredangle YBZ = \measuredangle YDZ \Rightarrow BYZD$ нь ил тойрог. $BC = CD$

$BX \times CZ = XC \times CD$ байх ёстой тул $BYZD$ нь адил хажуут трапец болох $BY = DZ$ мөн.

$\measuredangle AXC = \measuredangle AYC$, $\measuredangle AYC = \measuredangle BZD \Rightarrow \measuredangle EXZ = \measuredangle EZX \Rightarrow EX = EZ$

Одоо B-гээс AC-рүү $\perp$ буулгаад мөн C-гээс BD-рүү $\perp$ буулгаад O цэгт огтлолцдог гэе.

$AB = BC \Rightarrow ABCO$-н кайт болно ( ) $\Rightarrow AO = OC$
$BC = CD \Rightarrow BCDO$ нь кайт болно $\Rightarrow BO = OD$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB = CD \\ BO = OD \\ AO = OC \end{array}\right| \overset{ТТТ}{\Rightarrow} \Delta ABO = \Delta CDO \Rightarrow \measuredangle ABO = \measuredangle CDO$

мөн $\left.\begin{array}{l} XA = CZ \\ XB = ZD \\ AB = CD \end{array}\right| \overset{Т.Т.Т}{\Rightarrow} \Delta XBA = \Delta ZDC \Rightarrow \measuredangle XBA = \measuredangle ZDC$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle XBA = \measuredangle ZDC \\ \measuredangle ABO = \measuredangle CDO\end{array}\right| \Rightarrow \measuredangle XBO = \measuredangle ODZ.$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle XBO = \measuredangle ODZ \\ XB = DZ \\ OB = OD\end{array}\right| \overset{TOT}{\Rightarrow} \triangle XBO = \triangle ZDO \Rightarrow OX = OZ \Rightarrow$

~~EXZ~~ XEZ нь адил хажуут $\triangle$ мөн $OX = OZ \Rightarrow$ EO- нь XEZ гурвалжин өндөр медиан биссектрисс юм. $BK \perp OC$, $CK \perp BO \Rightarrow OK \perp BC$ юм $\Rightarrow$

XEZ-ийн өндөр медиан биссектрисс дээр байгаа цэгээс XZ суурь луу $\perp$ буулгасан байна $\Rightarrow$ E, O, K- цэгүүд нь нэг шулуун дээр оршино $\Rightarrow$ $EK \perp XZ. \Rightarrow$

AC, BD, EK-ийн нэг цэгт огтлолцоно.

Овог: Батцэнгэл
Нэр: Төрбат
Сургууль: Орчлон
анги: 12б.

B2. $p=5$ үед $\Rightarrow$

$M = a_0+10a_1+100a_2+1000a_3+10000a_4 \Rightarrow$

A хүн $a_0=5$-аар авбал $M \vdots 5$ юм. $\Rightarrow$

$p\neq 5 \Rightarrow (p,5)=1. \Rightarrow$

$10^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ юм (Фермагийн бага теорем)

одоо
$p=2$ үед $\Rightarrow$

$M=a_0+10a_1 \Rightarrow$ A хүн $a_0=2$ гэвэл $M \vdots 2$ тул

$p>2 \Rightarrow$
p-нь сондгой $\Rightarrow p-1 \vdots 2$. юм, $\Rightarrow$
$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod p$ Учир нь $10^{\frac{p-1}{2}}=a$ гэвэл
$a^2\equiv 1 \pmod p) \Rightarrow a^2-1 \vdots p \quad (a-1)(a+1)\vdots p) \Rightarrow a\equiv \pm 1 \pmod p$.

$10^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p$ бол.
Энэ үед A хүн $a_0=0$ гэж авна. $\Rightarrow$
Одоо a_1-ээс a_{p-1}-ийг

$$\begin{pmatrix} a_1, a_{1+\frac{p-1}{2}} \\ a_2, a_{2+\frac{p-1}{2}} \\ - \,,\, - \\ a_{\frac{p-1}{2}}, a_{p-1} \end{pmatrix}$$

- гэж $\frac{p-1}{2}$ хэсэгт хуваана. Одоо B хүн аль нэг a_i-ийг $\{0,..9\}$-өөр авбал A хүн бусад байгаа нөгөө тоог нь a_i-тай адилаар авна $\Rightarrow 1\le i\le \frac{p-1}{2}$ үед $\Rightarrow$

$10^i a_i + 10^{\frac{p-1}{2}+i}a_i = a_i 10^i(1+10^{\frac{p-1}{2}}) \Rightarrow$

$10^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p) \Rightarrow (1+10^{\frac{p-1}{2}})\vdots p \Rightarrow M\vdots p$ болох A хүн хожно.

$10^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p)$ үед $10^{\frac{p-1}{2}}-1 \vdots p \Rightarrow \underbrace{99..9}_{\frac{p-1}{2}} \vdots p$ юм.

мөн адил Энэ үед A хүн $a_0=0$ гэж авна $\Rightarrow$
Одоо a_1-ээс a_{p-1}-ийг

$$\begin{pmatrix} a_1, a_{1+\frac{p-1}{2}} \\ a_2, a_{2+\frac{p-1}{2}} \\ - \,,\, - \\ a_{\frac{p-1}{2}}, a_{p-1} \end{pmatrix}$$

- гэж $\frac{p-1}{2}$ хэсэгт хуваана. Одоо B хүн аль нэг a_i-ийг $\{0..9\}$-өөр авбал A хүн бусад байгаа нөгөө a_j-ийг $9-a_i$-аар авна $\Rightarrow$ $1\le i\le\frac{p-1}{2}$ үед $\Rightarrow 10^i a_i+10^{\frac{p-1}{2}+i}(9-a_i) = 10^i a_i + 9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}+i} - 10^{\frac{p-1}{2}+i}a_i =$

$10^i a_i(1-10^{\frac{p-1}{2}}) + 9\times 10^{\frac{p-1}{2}+i} \Rightarrow \quad 10^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p \Rightarrow$

$10^i a_i(1-10^{\frac{p-1}{2}})+9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}+i} \equiv 9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}+i} \pmod p$

6.5 оноо.

$\Rightarrow$

$$M \equiv 9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}+1} + 9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}+2} \dots + 9\cdot 10^{p-1} = 10^{\frac{p-1}{2}+1}\left(9 + 9\cdot 10 + 9\cdot 10^2 + \dots + 9\cdot 10^{\frac{p-1}{2}-1}\right) =$$

$$10^{\frac{p-1}{2}+1}\cdot\Big(\underbrace{\overline{99\dots 9}}_{\frac{p-1}{2}\ \text{ц}}\Big) \Rightarrow \underbrace{\overline{99\dots 9}}_{\frac{p-1}{2}\ \text{ц}} \equiv 0 \pmod p \Rightarrow M \,\vdots\, p \Rightarrow$$

A-у хотим стратегии баила.