Монголын Математикийн 54-р Олимпиад

IV Даваа

A1

Ангилал Шифр 1 0 0 8 7 | Оноо 7 | Хуудас/Нийт 1 4

Индукцлэн баталъя.

(i) $a_2 = \frac{3}{1}(a_1-1) \Rightarrow a_2$ - бүхэл тоо. $a_2 = 3l$ гэе.

(ii) $a_3 = \frac{4}{2}(a_2-1) \Rightarrow a_3$ - бүхэл тоо.

$a_3 = 2(a_2-1) = 2(3l-1)$.

(iii) $a_4 = \frac{5}{3}(a_3-1) = \frac{5}{3}(2(3l-1)-1) = \frac{5}{3}(6l-3) = 5(2l-1) \Rightarrow a_4$ - бүхэл тоо.

(iv) $a_5 = \frac{6}{4}(a_4-1) = \frac{3}{2}(5(2l-1)-1) = \frac{3}{2}(10l-6) = 3(5l-3) \Rightarrow a_5$ - бүхэл тоо.

Итгэд индукцийн суурь үнэн.

(a) $a_{2k} = \frac{2k+1}{2k-1}(a_{2k-1}-1)$ үед a_{2k} - бүхэл гэе.

$a_{2k-1} = \frac{2k}{2k-2}(a_{2k-2}-1)$ үед a_{2k-1} - бүхэл гэе.

$a_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k}(a_{2k}-1)$ үед a_{2k+1} - бүхэл гэж баталъя.

тэ

$$a_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k}(a_{2k}-1) = \frac{k+1}{k}\left((2k+1)\cdot\frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} - 1\right) =$$

$$= \frac{k+1}{k}\left(2k\cdot\frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} + \frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} - 1\right).$$

$(k; k+1) = 1$ учраас $2k\cdot\frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} + \frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} - 1 \,\vdots\, k$ бүүд.

$\frac{a_{2k-1}-1}{2k-1} - 1 \,\vdots\, k$ гэж баталбал болно.

$$\frac{a_{2k-1}-1}{2k-1}-1=\frac{a_{2k-1}-1-(2k-1)}{2k-1}=\frac{a_{2k-1}-2k}{2k-1}$$ болно.

$(2k;2k-1)=1$ учраас $a_{2k-1}-2k \vdots k$ буюу ~~$a_{2k-1}-2k \vdots k$~~

$a_{2k-1} \vdots k$ гэж баталбал болно.

$$a_{2k-1}=\frac{2k}{2k-2}(a_{2k-2}-1)=\frac{k}{k-1}(a_{2k-2}-1).$$ болно.

Эндээс $(k;k-1)=1$ мөн a_{2k-1} тоо бүхэл учраас

$a_{2k-1} \vdots k$ болж батлагдана.

б) $a_{2m+1}=\frac{2m+2}{2m}(a_{2m}-1)$ үед a_{2m+1} - бүхэл гэе.

$a_{2m}=\frac{2m+1}{2m-1}(a_{2m-1})$ үед a_{2m} - бүхэл гэе.

$a_{2m+2}=\frac{2m+3}{2m+1}(a_{2m+1}-1)$ үед a_{2m+2} - бүхэл гэж баталъя.

$$a_{2m+2}=\frac{2m+3}{2m+1}(a_{2m+1}-1)=\frac{2m+3}{2m+1}\left((2m+2)\cdot\frac{a_{2m}-1}{2m}-1\right)=$$

$$=\frac{2m+3}{2m+1}\cdot\left((2m+1)\left(\frac{a_{2m}-1}{2m}\right)+\frac{a_{2m}-1}{2m}-1\right)$$

Эндээс $(2m+1;2m+3)=1$ учраас

$(2m+1)\left(\frac{a_{2m}-1}{2m}\right)+\frac{a_{2m}-1}{2m}-1 \vdots (2m+1)$ буюу

$\frac{a_{2m}-1}{2m}-1 \vdots (2m+1)$ гэж баталбал болно.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал	Шифр				Оноо
1	0	0	8	7	

Хуудас/Нийт	
2	4

Үргэлжлэл.

$\frac{a_{2m-1}}{2m} - 1 \vdots (2m+1)$ гэж баталъя.

$$\frac{a_{2m-1}}{2m} - 1 = \frac{a_{2m-1} - 2m}{2m}$$

$(2m; 2m+1) = 1$ учраас $a_{2m} - (2m+1) \vdots (2m+1)$ буюу.

$a_{2m} \vdots (2m+1)$ гэж баталбал болно.

$a_{2m} = \frac{2m+1}{2m-1}(a_{2m-1} - 1) \vdots (2m+1)$ гэж баталъя.

Эндээс $(2m-1; 2m+1) = 1$ мөн a_{2m} бүхэл тоо учраас.

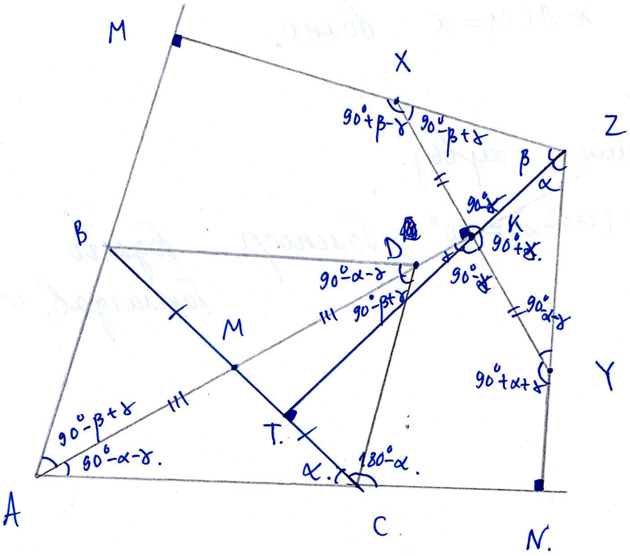
$a_{2m} \vdots (2m+1)$ болж батлагдав. ▲

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад

IV Даваа

A2

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	8	7	7	3	4



~~$KZ \cap BC = T$~~.

ZK, BC-ийн огтлолцлын цэгийг T гэе.

AK шулуун дээр $ABDC$ нь параллелограмм байхаар D цэг авъя. $AM=MD$.

$\angle XZK=\beta$, $\angle YZK=\alpha$, $\angle DKT=\gamma$ гэе.

Эндээс өнцөг хөөвөл.

$\angle ZKY = 90^\circ+\gamma = \angle XKT$. $\Rightarrow$ $\angle ZYK = 90^\circ-\alpha-\gamma \Rightarrow$ ~~$\angle ZYK$~~

$\angle XKZ = 90^\circ-\gamma = \angle YKT$. $\Rightarrow$ $\angle ZXK = 90^\circ-\beta+\gamma$. $\Rightarrow$

~~$\angle MXK = 90^\circ+\gamma-\beta$~~ $\angle MXK = 90^\circ+\beta-\gamma$

$\angle NYK = 90^\circ+\alpha+\gamma$ болно.

$\measuredangle KAN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (90^\circ + \alpha + \gamma) = 90^\circ - \alpha - \gamma = \measuredangle ADB.$

$\measuredangle KAM = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (90^\circ + \beta - \gamma) = 90^\circ - \beta + \gamma = \measuredangle ADC.$

Эндээс $\triangle XZY \sim \triangle DCA$ болно.

$\triangle XZY$-ны хувьд XK нь медиан $\measuredangle KZY = \alpha.$

$\triangle DCA$-ны хувьд ~~AD~~ CM нь медиан тул.

~~$\measuredangle ACM = 180^\circ - \alpha$~~ $\measuredangle ACM = \alpha$ болно.

Иймд $\measuredangle TCN = 180^\circ - \alpha.$

$TZNC$ 4-н өнцөгтийн хувьд.

$\measuredangle ZTC = 360^\circ - 90^\circ - \alpha - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ$ болсноор бодлого батлагдав.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа
A3

Ангилал: 1 | Шифр: 0087 | Оноо: 0 | Хуудас/Нийт: 4 4

a^2, b^3, c^4, d^5 тоонуудыг анхны тоон үржигдэхүүнд задлая.

$a^2 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ $b^3 = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n}$,

$c^4 = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{c_n}$ $d^5 = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{d_n}$.

Дараах арифметик прогрессийн ялгавар нь x байг. Тэгвэл

$x = d^5 - c^4 = c^4 - b^3 = b^3 - a^2$ болно.

$d^5 - c^4 = p_1^{\min(d_1; c_1)} \ldots p_n^{\min(d_n, c_n)} (D - C) = x$.

$c^4 - b^3 = p_1^{\min(c_1, b_1)} \ldots p_n^{\min(c_n, b_n)} (C - B) = x$.

$b^3 - a^2 = p_1^{\min(b_1, a_1)} \ldots p_n^{\min(b_n, a_n)} (B - A) = x$ байна.

Эндээс
$D-C \not\vdots p_1$, $D-C \not\vdots p_2$, $\ldots$, $D-C \not\vdots p_n$;
$C-B \not\vdots p_1$, $C-B \not\vdots p_2$, $\ldots$, $C-B \not\vdots p_n$;
$B-A \not\vdots p_1$, $B-A \not\vdots p_1$, $\ldots$, $B-A \not\vdots p_1$ учраас.

$p_1^{\min(d_1, c_1)} \ldots p_n^{\min(d_n, c_n)} = p_1^{\min(c_1, b_1)} \ldots p_n^{\min(c_n, b_n)} =$

$= p_1^{\min(a_1; b_1)} \ldots p_n^{\min(a_n; b_n)}$ болно. Гэвч энэ нь зорилго юмаа.

0.

Иймд a, b, c, d тоонууд нь анхны тоо байхаас өөр замгүй.

$a=2$ гэе.

$$c^4 - a^2 = 2x.$$
$$c^4 - 4 = 2x$$
$$(c^2-2)(c^2+2) = 2x \Rightarrow c \vdots 2$$ болж зөрчил үүснэ.

Иймд $a \neq 2$, x-тэгш байна.

0.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	3	0	0	7	1	4

$$a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\ge ab+bc+ca.$$

Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$b^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2b^4}{(b+c)^2}}=\frac{2ab^2}{b+c}.$$

$$c^4+\frac{b^2}{(c+a)^2}\ge 2\sqrt{\frac{b^2c^4}{(a+c)^2}}=\frac{2bc^2}{a+c}.$$

$$a^4+\frac{c^2}{(a+b)^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^4c^2}{(a+b)^2}}=\frac{2a^2c}{a+b}$$ болно.

Иймд $\frac{2ab^2}{b+c}+\frac{2bc^2}{a+c}+\frac{2a^2c}{a+b}\ge ab+bc+ca$ гэж баталбал болно.

$(a+c)(b+c)(a+b)$-ээр үржүүлбэл.

$$\left(\frac{2ab^2}{b+c}+\frac{2bc^2}{a+c}+\frac{2a^2c}{a+b}\right)(a+c)(b+c)(a+b)=$$

$$=2ab^2(a^2+ac+ab+bc)+2bc^2(ab+bc+ac+b^2)+$$

$$+2a^2c(ab+ac+bc+c^2)=2a^3b^2+2a^2b^2c+2a^2b^3+2ab^3c+$$

$$+2ab^2c^2+2b^2c^3+2abc^3+2b^3c^2+2a^3bc+2a^3c^2+2a^2bc^2+2a^2c^3$$

$$(ab+bc+ca)(a+b)(a+c)(b+c)=(a^2b+\cancel{2a}a^2c+ab^2+b^2c+2abc)\cdot$$

$$\cdot(ab+ac+bc+c^2)=\underline{a^3b^2}+\underline{a^3bc}+\underline{a^2b^3}+\underline{ab^3c}+\underline{2a^2b^2c}+a^3bc$$

$$+\underline{a^3c^2}+\underline{a^2b^2c}+\underline{ab^2c^2}+2a^2bc^2+a^2b^2c+a^2bc^2+\underline{ab^3c}+\underline{b^3c^2}+\underline{2ab^2c^2}$$

$$+\underline{a^2bc^2}+\underline{a^2c^3}+\underline{ab^2c^2}+\underline{b^2c^3}+\underline{2abc^3}=$$

$= a^3b^2+a^2b^3+a^2b^3+\cancel{a}b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3+2a^3bc+2ab^3c+$
$4a^2b^2c+4ab^2c^2+4a^2bc^2+2abc^3$

Эндээс $2a^3b^2+2a^2b^3+2a^2b^3+2b^3c^2+2a^2c^3+2b^2c^3+\cancel{2a^3bc}+$
$+\cancel{2ab^3c}+\cancel{2abc^3}+2a^2b^2c+2ab^2c^2+2a^2bc^2 \geq a^3b^2+a^2b^3+a^2b^3$
$+b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3+\cancel{2a^3bc}+\cancel{2ab^3c}+\cancel{2abc^3}+4a^2b^2c+4ab^2c^2+4a^2bc$

буюу $a^3b^2+a^2b^3+a^2b^3+b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3 \geq 2a^2b^2c+2ab^2c^2+$
$+2a^2bc^2$

гэж баталья.

Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{a^3b^2+a^2c^3+a^3c^2+b^2c^3}{2} \geq 2\sqrt{a^8b^4c^8} = 2a^2bc^2$$

$$\frac{a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+b^3c^2}{2} \geq 2\sqrt{a^8b^8c^4} = 2a^2b^2c$$

$$\frac{a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+a^2c^3}{2} \geq 2\sqrt{a^4b^8c^8} = 2ab^2c^2$$ болно.

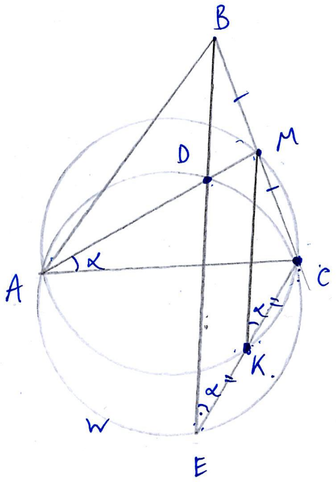
Дараах 3-н тэнцэтгэл бишийг нэмбэл батлах тэнцэтгэл биш гарна. Иймд батлагдав.

$a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б2

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	3	0	0	7	2	4



$\triangle AMC$-г багтаасан тойрог CE-г K цэгт огтолдог гэе.

$\angle DEC = \alpha$ гэе.

Тэгвэл

$\overset{\frown}{DC} = 2\alpha$.

$\angle DAC = \alpha$.

$\angle MAC = \alpha$.

$\overset{\frown}{MC} = 2\alpha$.

$\angle CKM = \alpha$ болно.

Эндээс.

$\angle BEC = \angle MKC = \alpha$ учраас $BE \parallel MK$. Мөн. $BM = MC$ учраас MK нь $\triangle BCE$-ны дундаж шугам болно. Иймд $CK = KE$ болж батлагдав. ▲

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал	Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
10	300	0 +1 = 1 оноо.	3 4

Өгөгдсөн үгэнд i ширхэг ялгаатай үсэг орсон бол тэдгээрийг $a_1, a_2, \dots, a_i$ гэж тэмдэглээд тухайн үсэг уг үгэнд хэдэн удаа орсныг

үсэг	a_1	a_2	$\dots$	a_i
хэдэн удаа	x_1	x_2	$\dots$	x_i

гэж тэмдэглэе.
$(x_1+x_2+\dots+x_i \leq 10)$

Цифрүүдийн нийлбэр нь 9-д хуваагдах тоо 9-д хуваагдах тул тухайн үгний үсгийн байрлал буюу цифрүүдийн байрлалаас хамаарахгүй юм. Нэ үгийн ерөнхий нэ л байрлалд ~~нь~~ бодъё.

$i=1$ үед бүх ~~[illegible]~~ үсгийг 9-өөр солино.

$i=2$ үед ~~[illegible]~~ үсгийг 9, 0-ээр солино.

$i=3$ үед

a_1	a_2	a_3	
1	1	1–8 хооронд	$\Rightarrow$ 639…9
1	2	2–7	$\Rightarrow$ 5229…9
1	3	3–~~6~~	$\Rightarrow$ 93330…0 эсвэл 33309…9
1	4	4–5	$\Rightarrow$ 511119…9
2	2	2–6	$\Rightarrow$ 66339…9
2	3	2–5	$\Rightarrow$ ~~442229…9~~ 993330…0 эсвэл 333009…9
2	4	4	$\Rightarrow$ 5522229…9
3	3	3–4.	$\Rightarrow$ 66664449…9
~~3~~ 4			

$i=4$ үед.

a_1	a_2	a_3	a_4	
1	1	1	1-7 хооронд	=> 5319…9
1	1	2	2-6.	=> 11349…9
1	1	3	3-5	=> 333549…9
1	1	4	4	=> 3211119…9
1	2	2	2-5	=> 322119…9
1	2	3	3-4	=> 7113339…9
1	3	3	3	=> 96663330…0 эсвэл 66633309…9
2	2	2	2-4	=> 5533119…9
2	2	3	3	=> 55443339…9

$i=5$ үед

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	1	1	1	1-6 хооронд	=> 65439…9
1	1	1	2	2-5	=> 754119…9
1	1	1	3	3-4.	=> 4326669…9
1	1	2	2	2-4	=> 7511229…9
1	1	2	3	3	=> 97113330…0 эсвэл 71133309…9
1	2	2	2	2-3.	=> 94433220…0 эсвэл 44332209…9
2	2	2	2	2	=> 663355449…9

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	3	0	0		4	4

$i=6$ үед

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
1	1	1	1	1	1−5	⇒ 814329…9
1	1	1	1	2	2−4	⇒ 4327119…9
1	1	1	1	3	3	⇒ 72543339…9.
1	1	1	2	2	2−3	⇒ 143288119…9
1	1	2	2	2	2	814433229…9.

Бүх боломжийг шалгаж гаргаагүй!

$i=7$ үед

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
1	1	1	1	1	1	1−4	⇒ 8172639…9
1	1	1	1	1	2	2−3	⇒ 63547119…9
1	1	1	1	2	2	2	⇒ 726388119…9

$i=8$ үед

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
1	1	1	1	1	1	1	1−3	⇒ 98172630…0 эсвэл 81726309…9
1	1	1	1	1	1	2	2	⇒ 817263990…0 эсвэл 817263009…9

$i=9$ үед. 8765432199 эсвэл 876543219

$i=10$ үед 9876543210.

Иймд батлагдав.