Монголын Математикийн 54-р Олимпиад

IV Даваа

A1

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	5	5	2+5=7Б.С	1	3

$n=2q$. ~~хувьд~~ $\cancel{a_{2q}\in\mathbb{Z}}$ n-ээс бага дурын m-ийн хувьд $a_m\in\mathbb{Z}$ бол $a_n\in\mathbb{Z}$ гэж баталъя.

$$a_{2q}=\frac{2q+1}{2q-1}\left(a_{2q-1}-1\right)=\frac{2q+1}{2q-1}\left(\frac{2q}{2q-2}\left(a_{2q-2}-1\right)-1\right)=$$

$$=\frac{2q+1}{2q-1}\left(\frac{q}{q-1}\left(a_{2q-2}-1\right)-1\right)$$ болно.

$a_{2q-1}\in\mathbb{Z}$ тул

$$a_{2q-1}=\frac{2q}{2q-2}\left(a_{2q-2}-1\right)\in\mathbb{Z}$$ байна

$(q,q-1)=1$ тул

$(a_{2q-2}-1)\ \vdots\ q-1$ б/на.

мөн $a_{2q-2}\in\mathbb{Z}$ тул

$$a_{2q-2}=\frac{2q-1}{2q-3}\left(a_{2q-3}-1\right)\in\mathbb{Z}$$ б/на.

$(2q-1,2q-3)=1$ тул $a_{2q-3}-1\ \vdots\ 2q-3$ болох ба

$a_{2q-2}\ \vdots\ 2q-1$ болно эндээс

$a_{2q-2}=(2q-1)\cdot t$ ба $a_{2q-2}=(q-1)\cdot l+1$ гэж бичиж болно, $t,l\in\mathbb{Z}$.

$(2q-1)t=(q-1)l+1$ $\quad l=\frac{(2q-1)t-1}{q-1}=\frac{(q-1)t+qt-1}{q-1}=$

$=\cancel{q-1}\ t+\frac{qt-1}{q-1}$ $\quad l\in\mathbb{Z}$ тул

иймд $qt-1\equiv t-1\equiv 0 \pmod{q-1}$.

$t-1=(q-1)m$ гэе. $m\in\mathbb{Z}$ тэгвэл

$t=(q-1)m+1$.

Иймд $a_{2q-2}=(2q-1)((q-1)m+1)$ гэж бичиж болно.

$a_{2q} = \frac{2q+1}{2q-1}\left(\frac{q}{q-1}\left((2q-1)((q-1)m+1)-1\right)-1\right)$ болно.

$$a_{2q} = \frac{2q+1}{2q-1}\left(\frac{q}{q-1}\cdot\left((q-1)(m(2q-1))+2q-1-1\right)-1\right) =$$

$$= \frac{2q+1}{2q-1}\left(\frac{q}{q-1}\left((q-1)(m(2q-1)+2)\right)-1\right) =$$

$$= \frac{2q+1}{2q-1}\left(q(m(2q-1)+2)-1\right) =$$

$$= \frac{2q+1}{2q-1}\left((2q-1)(qm+1)\right) = (2q+1)(qm+1)$$

болж $a_{2q}\in\mathbb{Z}$ болно.

одоо a_{2q+1}-г бүхэл гэж харуулъя

$$a_{2q+1} = \frac{2q+2}{2q}(a_{2q}-1) = \frac{2q+2}{2q}\left((a_{2q-1}-1)\frac{2q+1}{2q-1}-1\right) =$$

$$= \frac{q+1}{q}\left((a_{2q-1}-1)\frac{2q+1}{2q-1}-1\right)$$ болно.

~~эн~~ түрүүнтэй адилаар

$a_{2q-1} \vdots q$ ба $a_{2q-1}-1 \vdots 2q-1$ болох ба

$a_{2q-1} = (2q-1)\boxed{(1-qt)}+1$ гэж бичиж болно.

$$a_{2q+1} = \frac{q+1}{q}\left(((2q-1)(1-qt))\frac{2q+1}{2q-1}-1\right) =$$

$$= \frac{q+1}{q}\left((2q+1)(1-qt)-1\right) =$$

$$= \frac{q+1}{q}\left(q\cdot(2-2qt-t)\right) = (q+1)(2-2qt-t)$$ болж бодлого батлагдав.

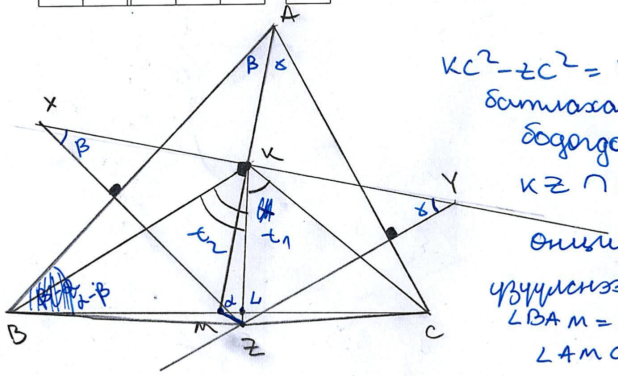
Мөн $a_1\in\mathbb{Z}$ ба $a_2 = 3(a_1-1)\in\mathbb{Z}$ мөн $a_3 = 2(a_2-1)\in\mathbb{Z}$ тул энэ

бодолтын [illegible]

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа
A2

Ангилал		Шифр			Оноо
1	0	0	5	5	1

Хуудас/Нийт	
2	3



$KC^2 - ZC^2 = KB^2 - BZ^2$ гэж батлахад бодлого бодогдоно.

$KZ \cap BC = L$ гэе.

Өнцгүүдээ зурагт үзүүлснээр $\angle BAM = \beta$ $\angle MAC = \gamma$ $\angle AMC = \alpha$ гэе.

$KC^2 = KM^2 + MC^2 - 2\cdot KM \cdot MC \cdot \cos\alpha$

$KB = KM^2 + MB^2 - 2KM \cdot MB \cdot \cos(180-\alpha)$

$KC^2 - KB^2 = 2KM \cdot MC\,(\cos(180-\alpha) - \cos(\alpha)) =$

$= 4KM \cdot MC \cdot \cos(180-\alpha)$.

Одоо бид $\cancel{BZ^2-ZC^2} = 4KM\cdot MC\cdot \cos(180-\alpha) = ZC^2 - BZ^2$ гэж ~~бат~~ батална.

$ZC^2 = KZ^2 + KC^2 - 2\cdot KZ \cdot KC \cdot \cos t_1$

$BZ^2 = BK^2 + K^2Z^2 - 2KZ \cdot KB \cdot \cos t_2$

$ZC^2 - BZ^2 = KC^2 - KB^2 + 2KZ(KB\cdot\cos t_2 - KC\cdot\cos t_1)$.

$KC^2 = AK^2 + AC^2 - 2AK\cdot AC\cdot\cos\gamma$

$KB^2 = AK^2 + AB^2 - 2AK\cdot KB\cdot\cos\beta$ болно

Энд M нь BC-н дундаж тул $S_{AKC} = S_{BAK}$ б/на.

$\cancel{KC^2 - KB^2} = 1$ ... $AC^2 = MC^2 + MA^2 - 2MC\cdot MA\cos$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа **Б1**

Ангилал Шифр: 10 268 | Оноо: 7 | Хуудас/Нийт: 1 6

1a.

$$a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2a^4+2b^4+2c^4\right)+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\overset{(1)}{\geq}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}\left(\sum\frac{(a^2+b^2)^2}{2}\right)+\sum\frac{a^2}{(b+c)^2}\overset{(1)}{\geq}\frac{1}{2}\left(\sum\frac{\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2}{2}\right)+\sum\frac{a^2}{(b+c)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\frac{(a+b)^4}{8}+\sum\frac{a^2}{(b+c)^2}=\sum\frac{(a+b)^4}{16}+\sum\frac{a^2}{(b+c)^2}\overset{(2)}{\geq}$$

$$\overset{(2)}{\geq}2\sqrt{\frac{(a+b)^4\cdot c^2}{16\cdot(a+b)^2}}+2\sqrt{\frac{(b+c)^4\,a^2}{16\,(b+c)^2}}+2\sqrt{\frac{(c+a)^4\,b^2}{16\,(c+a)^2}}=$$

$$=2\left(\frac{1}{4}\left((a+b)\cdot c+(b+c)\cdot a+(a+c)\cdot b\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(ca+cb+ab+ac+ab+bc\right)=ab+bc+ca$$ болж бодлого батлагдав.

(2) дээр Коши-Буняковскийн өргөтгөлийг ашиглав

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n}$$ энд.

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ үед тэнцэлд хүрнэ.

(2) дээр коши ашиглав.

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ б/на. Энд $a=b$ үед тэнцэлд хүрнэ.

Эндээс бодлого

$$\begin{cases} a^4=b^4=c^4 \\ a^2=b^2=c^2 \\ \frac{(a+b)^4}{16}=\frac{c^2}{(a+b)^2} \\ \frac{(b+c)^4}{16}=\frac{a^2}{(b+c)^2} \\ \frac{(c+a)^4}{16}=\frac{b^4}{(c+a)^2} \\ a,b,c>0 \end{cases}$$

үед тэнцэлд хүрнэ

$a^4=b^4=c^4$ ба $a^2=b^2=c^2 \Rightarrow$

$|a|=|b|=|c|$ болно

$a,b,c>0$ тул $a=b=c$ б/на.

Мөн

$\frac{(b+c)^4}{16}=\frac{a^2}{(b+c)^2} \Rightarrow \frac{(2a)^4}{16}=\frac{a^2}{(2a)^2} =$

$\Rightarrow (2a)^6 = 16a^2$ үед тэнцэлд хүрнэ.

$64a^6=16a^2$ $a>0$ тул $64a^4=16$.

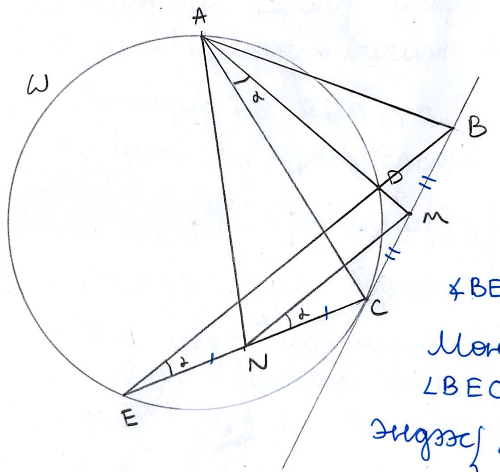
$a^4=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$ $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ болно

$a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ үед тэнцэлд хүрнэ.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б2

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	6	8	7	2	6



CE хөвчийн дундажийг N гэе.
$N \leftrightarrow M$. $CM = MB$ ба $CN = NE$ тул фалесын th-оор $EB \parallel NM$ болно.
Тэгвэл $\angle BEC = \alpha$ гэе.
$\measuredangle BEC = \angle DEC = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \angle CAD = \alpha$ болно.
Мөн $EB \parallel NM$ тул
$\angle BEC = \angle MNC = \alpha$ болно.
Эндээс $\begin{cases} \angle MNC = \alpha \\ \angle CAD = \angle CAM = \alpha \end{cases}$ болж NAMC дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах болж бодлого батлагдав.

$N \in \omega(AMC)$ болсноор AMC гурвалжны багтаасан тойрог CE хөвчийн дундажийг дайрах болно.
Энэ бодлогоны зураг 1 янзаар л гарах ба мохой үед мөн адил бодогдоно.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа **Б3**

Ангилал Шифр: 1 0 2 6 8 | Оноо: 7 Оноо. | Хуудас/Нийт: 3 6

Үсгүүдийн оронд цифр бичихдээ эхний үсгэнд 0-ийн цифр бичиж болно гэж үзэж бодов.

Үсгүүд нь $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ байг. Энд a_i үсэг b_i удаа орсон гэе. ($b_i \geq 0$, $b_i \in \mathbb{Z}$ $i=\overline{1,10}$).

Ерөнхий (1-д) 10 үсэг орсогүй үед. (1)

1) $(9, A)=1$ үед бодъё. ($A=\sum_{i=1}^{9} b_i$) $A \in \mathbb{N}$.

Энэ үед үсгүүдээ дурын байдлаар цифр болгон бичье. (0-ын цифр ашиглахгүй ба $a_i \neq a_j$ бол a_i, a_j д ялгаатай цифрүүд бичнэ).

a_i д x_i гэдэг цифр бичсэн гэе. ($i=\overline{1,9}$)

(Нийтдээ 9 цифр байгаа)

$\sum_{i=1}^{9} b_i \cdot x_i \equiv x \pmod 9$ байг. Хэрэв $x \vdots 9$ бол a_i д (x_i+1) гэдэг цифр бичье.

хэрэв $x_i = 9$ бол 1-ийн цифр оронд нь бичнэ.

$\sum_{i=1}^{9} b_i \cdot (x_i+1) \equiv x+A \pmod 9$ байна. Учир нь

$\sum_{i=1}^{9} b_i(x_i+1) = \sum_{i=1}^{9} b_i x_i + \sum_{i=1}^{9} b_i \equiv x+A \pmod 9$

$\left((9+1) \equiv 1 \pmod 9\right)$ Хэрэв $x+A \vdots 9$ бол энэ үйлдлийг дахин дахин хийх замаар

~~$(x+y)A$ үлдэгдэл өгөх~~ 9д $x+A$ үлдэгдэл өгөх тоо бичиж гадна.

(Учир нь 9д хув тоог 9д хуваахад гарах үлдэгдэл цифрүүдийн нийлбэрийг 9д хуваахад гарах ~~үлдэгдэлтэй~~ үлдэгдэлтэй адил байна. (☆))

Одоо $(A,9)=1$ бол $x+YA \vdots 9$ байх ~~$Y\in \mathbb{N}$~~ олдоно гэж баталъя ($Y\geq 0$ $Y\in\mathbb{Z}$)

$(A,9)=1$ тул $i\cdot A + j\cdot 9 = 1$ байх $i,j\in\mathbb{Z}$ байх i,j тоонууд олдоно.

Энд $A\in\mathbb{N}$ ба $9\in\mathbb{N}$ тул i,j -н аль нэг нь натурал байлгах болно.

$j\in\mathbb{N}$.

$j\cdot 9 - i_1 A = 1$ байх $i_1\in\mathbb{N}$.

$x\cdot j9 - i_1 xA = x$ ба $x + i_1 xA \vdots 9$ $y = i_1 x$ -ээр сонгоход болно.

Эндээс $(9,A)=1$ үед бодлого бодогдов. (☆) ёсоор

2) Одоо $3|(9,A)$ байг. ($A\vdots 3$) тэгвэл

b_1 ээс b_9 ~~үржигдэхүүн~~ тоонуудын ~~аль нэгээс~~ бусад нэгтгэлийн нь нийлбэр ~~харгалзах ашгийн~~ 9 тэй ~~зэрэг хуваагддаг~~ бол тэр тоонд харгалзах үсгэнд 0-н цифрийг бичээд цифрийн хувьд (1) ёсоор бодлого бодогдоно

одоо аль ~~2~~ 8 -н хувьд тийм биш гэж үзвэл $b_1+\ldots+b_9 \vdots 3$ ба $b_1+\ldots+b_8 \vdots 3$ тул $b_9 \vdots 3$ болно гэх мэтчилэн

b_i н хувьд $b_i \vdots 3$ болно $(i=\overline{1,9})$.

$b_i = k_i\cdot 3$ гэе.

$A = 3(k_1+k_2+\ldots+k_9)$ болно. (a_i-д одоо цифр бичнэ гэж үзвэл)

тэгвэл $3(k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_9a_9) \vdots 9$ гэж батлавал

☆ ёсоор бодогдоно ($☆_2$) эндээс

$k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_9a_9 \vdots 3$ гэж батлах болно

Хэрэв $k_1+k_2+\ldots+k_9$ н хувьд (1) биелдэг бол бодлого (1) ёсоор бодогдоно.

Харин (2) -р тохиолдолоор $k_1+k_2+\ldots+k_9 \vdots 3$ бол мөн $☆_2$ ёсоор бодоод шийднэ.

Эндээс (Ерөнхий $\sqrt{}$ шийдэгдэв)

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад

IV Даваа

Б3

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	6	8		4	6

Ерөнхий 2. Бүх цифр орсон буюу 10 торлийн үсэгтэй үед.

~~хэрэв $b_1+b_2+\dots+b_{10}=A$ гэвэл $(A,9)=1$ бол~~

~~Ерөнх~~ ~~хэрэв $b_1+\dots+b_{10}$ нь 9-тэй харилцан~~

хэрэв b_1 ээс b_{10}-н аль нэг тоонд харгалзах үсэгнд 0-2 бичихэд үлдсэн 9-н нийлбэр A-тай харилцан анхны бол Ерөнхий 1 ёсоор бодлого шийдэгдэнэ.

Харин эсрэгээрээ бол өмнөхийн ёсоор

~~$\forall i$ $b_i \vdots 3$ болно. $(i=\overline{1,10})$~~

~~$b_i = 3\cdot k_i$ гэе.~~

~~$3(k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_{10}a_{10})-2$ 9-д хуваагдана гэж баталъя~~

~~Хэрэв $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{10}$-н аль нэгэх харгалзах бусад 9-н нийлбэр 9-тэй харилцан анхных бол~~

~~нь Ерөнхий 1 ёсоор бодлого шийдэгдэнэ.~~

~~Харин үгүй гэвэл мөн л $k_i \vdots 3$ болно. $i=\overline{1,10}$~~

$b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv b_4 \equiv \dots \equiv b_{10} \pmod 9$ болно.

Учир нь $(b_1+\dots+b_{10})-b_i-b_j+b_j \vdots 3$ болно мөн

$(b_1+\dots+b_{10})-b_i-b_j+b_i \vdots 3$ болно эндээс

$b_i \equiv b_j \pmod 3$ болно

Энэ үед $b_i \equiv q \pmod 9$ гэвэл ~~$\vee$ 9~~

$b_i \equiv q \vee (q+3) \vee (q+6) \pmod 9$ б/на. ($9 \vdots 3$ учраас)

$b_1\cdot a_1+\ldots+b_{10}\cdot a_{10} \equiv q(a_1+\ldots+a_{10})+B \pmod 9$ болно.

$q\cdot(a_1+\ldots+a_{10}) = q\cdot(1+\ldots+9) = 45\cdot q \vdots 9$ тул

$B \vdots 9$ гэж баталъя.

$B\vdots 3$ гэдэг нь ойлгомжтой

$B = 6(\underbrace{a_1+\ldots}_{\text{бүлэг 1}}) + 3(\underbrace{a_x+\ldots}_{\text{бүлэг 2}})$ гэсэн хэлбэртэй

байх ба аль 2 бүлэг хэдэн

цифртэй байсан хамаагүй

бүлгийн тус бүрийн цифрүүд 3д

хуваагдахаар тоо байрлуулж гадна

гэж харуулъя.

$B = 3(2(a_1+\ldots)+(a_x+\ldots)) \Rightarrow$

$2(a_1+\ldots)+(a_x+\ldots)$ -г 3д хуваагдахаар

цифрүүдийг байрлуулж ~~...~~

гадна гэж баталъя.

$2(a_1+\ldots)+(a_x+\ldots) \equiv \underbrace{(a_x+\ldots)}_{\text{I бүлэг}} - \underbrace{(a_1+\ldots)}_{\text{II бүлэг}} \pmod 3$.

I ба II бүлэг модулаар тэнцүү эрхтэй

тул I бүлэг a тоотой II бүлэг m тоотой

байхыг II бүлэг c тоотой

I бүлэг m тоотой байх адилхан

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал Шифр: 1 0 . 2 6 8 | Оноо: 0 | Хуудас/Нийт: 5 6

I бүлэг	II бүлэг (элементийн тоо)	байгуулалт (I, II)
0	0	элементгүй (байхгүй)
0	1	(хоосон) (3)
0	2	(хоосон) (1,2)
0	3	(хоосон) (1,2,3)
0	4	(хоосон) (0,1,2,3)
0	5	(хоосон) (1,2,3,6,9)
0	6	(хоосон) (1,2,3,4,5,6)
0	7	(хоосон) (0,1,2,...,6)
0	8	(хоосон) (0,1,2,3,4,5,6,9)
0	9	(хоосон) (1,...,9)
0	10	(хоосон) (0,1,...,9)
1	1	(3) (6)
1	2	(3) (1,2)
1	3	(0) (1,2,3)
1	4	(0) (1,2,3,6)
1	5	(0) (1,2,3,6,9)
1	6	(0) (1,2,...,6)
1	7	(0) (3,4,5,...,9)
1	8	(0) (1,2,...,8)
1	9	(0) (1,2,...,9)
2	2	(1,2) (6,9)
2	3	(1,2) (3,4,5)
2	4	(1,2) (3,4,5,0)
2	5	(1,2) (3,4,5,6,9)
2	6	(1,2) (0,3,4,5,6,9)
2	7	(1,2) (0,3,4,5,6,7,8)
2	8	(1,2) (0,3,4,...,9)
3	3	(1,2,3) (4,5,6)
3	4	(0,1,2) (3,4,5,6)
3	5	(0,1,2) (3,4,5,6,9)
3	6	(0,1,2) (3,4,5,6,7,8)
3	7	(0,1,2) (3,4,5,6,7,8,9)