



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал Шифр

10	08	2
----	----	---

Оноо

7

Хуудас/Нийт

14

$$a_2 = \frac{3}{1}(a_1 - 1) = 3(a_1 - 1) \text{ бүрэн}$$

$$a_3 = \frac{4}{2}(3(a_1 - 1) - 1) = 2(3a_1 - 4) \text{ бүрэн}$$

$$a_4 = \frac{5}{3}(6a_1 - 8 - 1) = 5(2a_1 - 3) \text{ бүрэн}$$

$$a_5 = \frac{6}{4}(5 \cdot (2a_1 - 3) - 1) = 3(5a_1 - 8) \text{ бүрэн}$$

$$a_5 = 5 \cdot (3a_1 - 5) + 1$$

Индукцээр $a_{2k+1} = (2k+1)(k+1) \cdot a_1 - 2k - 1 + 1$ байсан
гэвэл:

$$a_{2k+2} = \frac{2k+3}{2k+1} \left((2k+1)(k+1) \cdot a_1 - 2k - 1 \right) = (2k+3) \left((k+1) \cdot a_1 - 2k - 1 \right) \text{ бүрэн}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+3} &= \frac{2k+4}{2k+2} \left(a_1 (k+1)(2k+3) - 4k^2 - 6k - 2k - 3 - 1 \right) = \\ &= \frac{k+2}{k+1} \left(a_1 (k+1)(2k+3) - 4(k+1)^2 \right) = (k+2) \left(a_1(2k+3) - 4(k+1) \right) = \end{aligned}$$

$$= (2k+3) \left((k+2) \cdot a_1 - 2k - 3 \right) + 1. \text{ Мөн бүрэн тус да}$$

индукцээр индукцээр сууриа
маглан байгаа учир өдгөө
өдгөө.

$$z = \frac{abx - b^2x + btx - axt + a^2t - a + b - abt}{\bar{a}b + at - 1 - bt}$$

$$\frac{z - \kappa}{\beta - \mu} \cdot i \in \mathbb{R} \text{ нь самбар хошуу.}$$

$$\frac{abx - b^2x + btx - axt + a^2t - a + b - abt - \beta a^2x + \beta a^2t + \beta a - \beta abt}{(\beta - t)(\bar{a}b + at - 1 - bt)} \cdot i \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x(\beta(a-b) - t(a-b))}{(\beta - t)(\bar{a}b + at - 1 - bt)} \cdot i \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x(a-b)(\beta - t)}{(\beta - t)(\bar{a}b + at - 1 - bt)} \cdot i = -i \frac{x(\bar{a} - \bar{\beta})}{a\bar{\beta} + \bar{a}t - 1 - \bar{\beta}t} \cdot \frac{ab}{ab}$$

$$\frac{a - \beta}{\bar{a}b + at - 1 - bt} \cdot i = -i \cdot \frac{\beta - a}{a^2 + b\bar{t} - ab - a\bar{t}}$$

$$a^2 - ab + (\beta - a)(a + \bar{a} - t) = \bar{a}b + at - 1 - \beta t$$

$$\cancel{a^2 - ab} + ab - \cancel{a^2} + \bar{a}b - 1 - \beta t + at = \bar{a}b + at - 1 - \beta t$$

$0 = 0$ ошум ~~дог~~ самбаргууа.



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A2

Ангилал Шифр

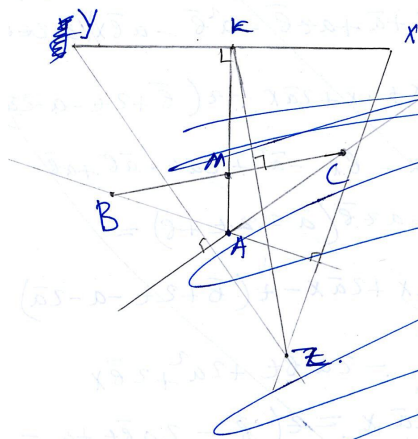
7	0	0	8	2
---	---	---	---	---

Оноо

0

Хуудас/Нийт

3	4
---	---



Комплексе тоолоор $M=t$,

~~$|a|+k=a, (A=\bar{a}), X=a+x, Y=a-x,$~~

~~$B=b, |b|=1, \text{ ийм } a, b \text{ үзүүрлүүд } \bar{a} \text{ болно.}$~~

~~M нь AK гэрэл оршин тул~~

~~$\frac{A-M}{A-k} \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a} = a\bar{a} - t.$~~

~~$AK \perp YK$ загвар $X=\bar{X}$. Өөрөөр X нь
догдм тоо.~~

~~$\frac{B+C}{2} = M, \frac{B+C}{2} = t \Rightarrow C = 2t - b.$~~

~~$\frac{B-A}{X-Z} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b-a}{a+x-z} \in \mathbb{R} \Rightarrow -i \frac{\bar{b}-a}{a+x-z} \cdot \frac{b\bar{a}}{b\bar{a}} = \frac{\bar{a}-b}{\bar{a}^2 b + \bar{a}b - \bar{a}b\bar{z}}$~~

~~$\bar{a}b\bar{z} = \bar{a}bx + \bar{a}^2\bar{b} + z - a - x$~~

~~$\bar{z} = \frac{\bar{a}bx + \bar{a}^2\bar{b} + z - a - x}{\bar{a}b} = X + \bar{a} + a\bar{z}\bar{b} - \bar{a}^2\bar{b} - a\bar{b}X.$~~

~~$\frac{A-C}{Y-Z} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a-z\bar{z}+b}{a-x-z} \in \mathbb{R}.$~~

~~$\frac{a-zt+b}{a-x-z} \cdot \frac{a-z\bar{z}+b}{a-x-z} = -i \frac{a+b-2(a+\bar{a})-t}{a-x-z}$~~

~~$t-ax+ia\bar{z} = z\bar{a} + z\bar{z}x + z\bar{z}\bar{z}$~~

~~$-\bar{z}(a-zt+b) + x - z\bar{a} + \bar{a}b = ax + z\bar{z}x - x\bar{b} =$~~

~~$= -z(\bar{b}-za-\bar{a}+zt) + x\bar{b} - zax - \bar{a}x + z\bar{z}x - \bar{a}\bar{b} + z\bar{a}^2 + x - zat.$~~

~~$az\bar{z}(z\bar{z}-a-b) + z\bar{z}x - x\bar{b} + z\bar{a} + \bar{a}b - \bar{a}^2\bar{b}t + \bar{a}^2\bar{b} + \bar{a}^2 - z\bar{a}bx + t + \bar{a}^2\bar{z}x + ax + \bar{z}\bar{z} - ax - \bar{a}x - \bar{a}\bar{b} + z\bar{a}^2 - zat - z\bar{a} + \bar{a}\bar{b} - x\bar{b} =$~~
 ~~$= -z(\bar{b}-za-\bar{a}+zt) + x\bar{b} - ax - \bar{a}x - \bar{a}\bar{b} + z\bar{a}^2 - zat +$~~

$$\frac{A-c}{y-z} \cdot i \in \mathbb{R} \quad \frac{\bar{a} - 2t + \theta}{a - x - z} \cdot x = \frac{a - 2\bar{t} + \bar{\theta}}{\bar{a} - \bar{x} - \bar{z}} \cdot \bar{x}$$

$$(\bar{a} - 2t + \theta)(\bar{a} - \bar{x} - \bar{z}) = (a - x - z)(a + \bar{\theta} - z(a + \bar{a} - 2t))$$

$$\bar{a}^2 - 2\bar{a}t + \bar{a}\theta - \bar{a}\bar{x} + 2t\bar{x} - \theta\bar{x} - (x + \bar{a} + a z \bar{\theta} - a^2 \bar{\theta} - a \bar{\theta} x)(\bar{a} - 2t + \theta)$$

$$= a\bar{\theta} + 2at - a^2 - z - \bar{\theta}x - 2tx + ax + 2\bar{a}x - z(\bar{\theta} + 2t - a - 2\bar{a})$$

$$\bar{a}^2 - 2\bar{a}t + \bar{a}\theta - \bar{a}\bar{x} + 2t\bar{x} - \theta\bar{x} - \bar{a}\bar{x} + 2tx - \theta x - \bar{a}^2 + 2\bar{a}t - \bar{a}\theta + a\bar{\theta}$$

$$- 2a^2\bar{\theta}t + a^2 + \bar{\theta}x - 2ta\bar{\theta}x + a\bar{x} - a z \bar{\theta}(\bar{a} - 2t + \theta) =$$

$$= a\bar{\theta} + 2at - a^2 - z - \bar{\theta}x - 2tx + ax + 2\bar{a}x - z(\bar{\theta} + 2t - a - 2\bar{a})$$

$$- 2\bar{a}t - 2\bar{a}x + \theta tx - 2\theta x + 2\bar{a}t - 2a^2\bar{\theta}t + 2a^2 + 2\bar{\theta}x$$

$$- 2a\bar{\theta}xt - 2at + z - 2\bar{a}x = z(\bar{\theta} - 2a\bar{\theta}t + a - \bar{\theta} - 2t + a + 2\bar{a})$$

$$z = \frac{-2\bar{a}t - 2\theta x - 4\bar{a}x + 6tx + 2\bar{a}t - 2a^2\bar{\theta}t + 2a^2 + 2\bar{\theta}x - 2a\bar{\theta}xt - 2at + z}{2\bar{a} + 2a - 2t - 2a\bar{\theta}t}$$

$$- 2at + 2a$$

$$\frac{z-k}{\theta-t} \cdot i \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\bar{\theta}x - 2a\bar{\theta}xt + 2\bar{a}t + 6tx - 4\bar{a}x$$



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал Шифр

10 0 8 2

Оноо

0

Хуудас/Нийт

4 4

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 \\ b^3 &= a^2 + x \\ c^4 &= a^2 + 2x \\ d^5 &= a^2 + 3x \end{aligned}$$
 гэж бичье. $a:2$ байсан гэвэл $a^2:4$,

$c^4:2 \Rightarrow c^4:16$ байх $2x:4$

$x:2$ байх буюу тэгш тооноор
байно.

$a^2 \not\equiv 1 \pmod{8}$ гэвэл $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$, $c^4 \equiv 1 \pmod{8}$ байх $2x:8, x:4$
байх буюу сондгой тооноор байна.

0.



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

B1

Ангилал Шифр

1	0	1	9	5
---	---	---	---	---

Оноо

7

Хуудас/Нийт

1	3
---	---

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(a+c)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq ab + bc + ca.$$

Кошийн тэнцэтгэл бичгээр:

$$a^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} \geq 2 \cdot \frac{a^3}{b+c} \quad b^4 + \frac{b^2}{(a+c)^2} \geq 2 \cdot \frac{b^3}{a+c} \quad c^4 + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq 2 \cdot \frac{c^3}{a+b}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(a+c)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq 2 \left(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \right) \geq ab + bc + ca$$

$$2 \left(a^5 + a^4 b + a^3 c + a^2 b c + b^5 + b^4 a + b^3 c + b^2 a c + c^5 + c^4 a + c^3 b + c^2 a b \right) \geq (ab + bc + ca) \cdot$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = a^3 b^2 + a^2 b^3 + a^3 c^2 + a^2 c^3 + b^3 c^2 + b^2 c^3 + 2abc^2 + 2ab^2c$$

$$+ 2abc^3 + 4a^2 b^2 c + 4a^2 b c^2 + 4a b^2 c^2$$

Кош:

$$\frac{a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + b^5}{5} \geq a^3 b^2 \quad \frac{a^5 + a^5 + b^5 + b^5}{5} \geq a^2 b^3 \quad \frac{a^5 + a^5 + c^5 + c^5}{5} \geq a^2 c^2$$

$$\frac{a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + c^5 + c^5}{5} \geq a^2 c^3 \quad \frac{b^5 + b^5 + b^5 + c^5 + c^5}{5} \geq b^2 c^2 \quad \frac{b^5 + b^5 + c^5 + c^5}{5} \geq b^2 c^3$$

$$2(a^4 b + c^4 b) \geq 4a^2 c^2 b \quad 2(a^4 c + b^4 c) \geq 4a^2 b^2 c \quad 2(c^4 a + b^4 a) \geq 4a b^2 c^2$$

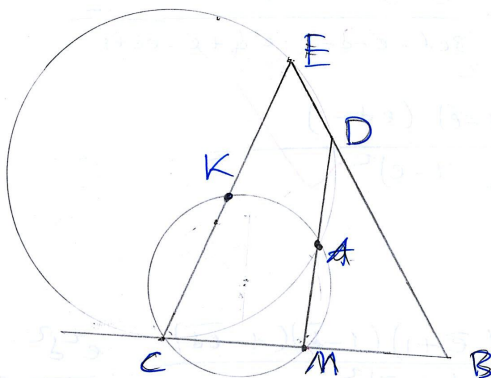
Иймд бичиж болно.

Тэнцэтгэлд зэрэг нэгэн хэргийг $a = b = c = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$



Ангилал	Шифр	Оноо
10	295	7

Хуудас/Нийт
23



Комплекс тоолоор

$E=e$ $|e|=1$, $D=d$ $|d|=1$, $C=1$
гэж үзэжүүдээ авъя.

$$\frac{E-B}{E-D} \in \mathbb{R} \quad \frac{e-b}{e-d} = \frac{\bar{e}-\bar{b}}{e-d} \cdot \frac{ed}{ed} =$$

$$= \frac{d-ed\bar{b}}{ed} \quad \bar{b} = \frac{e+d-b}{ed}$$

$$i \cdot \frac{C-B}{C-D} \in \mathbb{R} \quad i \cdot \frac{1-b}{1-d} = -i \frac{1-\bar{b}}{1-d}$$

$$\frac{e+d-b}{ed} = 2-b \quad \bar{b} = 2-b$$

$$\frac{B+C}{2} = M \quad M = \frac{zed-e-d}{ed-1} + 1 = \frac{zed-e-d-1}{2(ed-1)}$$

$$\frac{D-A}{D-M} \in \mathbb{R} \quad \frac{d-a}{d-\frac{zed-e-d-1}{2(ed-1)}} = \frac{2(d-a)(ed-1)}{2ed^2-2d-3ed+e+d+1} =$$

$$= \frac{2(d-a)(ed-1)}{(d-1)(2ed-e-1)} \cdot \frac{daed}{daed} = \frac{2(d-a)(1-e\bar{d})}{(1-d)(2a-da-dae)}$$

$$2a-da-dae = e+1-zed$$

$$a = \frac{e+1-zed}{2-d-de} \quad K = \frac{E+C}{2} = \frac{e+1}{2}$$

КАМС нэг тойрог дээр оршино гэдгийг:

$$\frac{M-A}{C-A} : \frac{M-K}{C-K} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{A-D}{C-A} : \frac{M-K}{C-E} \in \mathbb{R} \quad \text{гэвэл үр.}$$

$$\frac{A-D}{C-A} = \frac{C-E}{A-K} = \frac{3ed-e-d-1}{2(ed-1)} = d$$

$$\frac{A-D}{C-A} : \frac{A-K}{C-E} = \frac{e+1-2ed}{2-d-de} \cdot d \cdot \frac{3ed-e-d-1}{2(ed-1)} - \frac{e+1}{2} =$$

$$= \frac{e+1-2ed-2d+d^2+d^2e}{2-d-de-e-1+2ed} \cdot \frac{2(1-e)(ed-1)}{2ed-e-d-1-e^2d+e-d+1} =$$

$$= \frac{(e+1)-2d(e+1)+d^2(e+1)}{(1-d)(1-d)} \cdot \frac{2(1-e)(ed-1)}{-d(1-e)^2} =$$

$$= \frac{(e+1)(1-d)^2}{(1-d)} \cdot \frac{2(1-e)}{d(1-e)^2}$$

$$\frac{2(e+1)(1-d)(1-ed)}{d(1-e)^2} = \frac{2(e+1)(1-d)(1-ed)}{d(1-e)^2} \cdot \frac{e^2d^2}{e^2d^2} =$$

$$= \frac{2(1+e)(d-1)(ed-1)}{d(e-1)^2}$$

Using logarithmic
differentiation.



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

БЗ

Ангилал	Шифр	Оноо
10	295	0

Хуудас/Нийт
33

3-д хуваагдах эрхийг нь л шалгах үед 1 үеэр бөөс олон оролцуу
 гээ. 3-д хуваагдах таныг шалгах: үндсүүдийн ижил эр нь
 1 ан, үеэр байсан гэвэл тэр үеэрээ 3 болгоод дуусна. 3-д хуваагдах
 үл тоо өөрөө 3-д хувааг
 дагана.

3 үеэр байсан гэвэл тэр гурван орсон тоо нь ^{аль 1 нь} 3-д хуваагдах
 байвал тэрийгээ 3-д үндсэн 2-оо 3,0-ээд дуусна.

Аль нь ч 3-д хуваагдахгүй гэвэл: аль 1 хоёр нь ижил удаа
 орсон бол тэр 2-оо ^{1,8} үндснийгээ 3-оо-оо дуусна. Бүгд
 хялалтай гэвэл:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 8 \equiv -1 \pmod{3} \\ 2 \cdot 4 \equiv -1 \pmod{3} \\ 5 \cdot 7 \equiv -1 \pmod{3} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{3} \\ 8 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{3} \\ 4 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right.$$

3 хялалтай удаа орсон үед аль 1-ээ гүйл нь -1 +1 үндснээр
 3-д огууртаа үндснийг нь 3-ээд дуусна.

Чухан байвал аль 1 нь ^{тэрийгээ 3-оо} 3-д хуваагдах байх бүр боломжийг нь өмнө
 баталсан. Бүгд 3-д хуваагдахгүй үед аль 1-ээ нь ижил бол
^{1,8} 3-д үндсэн 2-оо 3,0-ээд дуусна. Бүгд өөр бол ч 3-д хувааг
 баталсан тоо илгээ гэнгээ үндсэн 2 нь 3,0-ээд дуусна.

5 үеэр байвал: Заас олон үеэний орсон тоо 3-д хуваагдах байвал
~~дурмагтай зарчмаар~~ нэг бол 3 удаа эхэл 6 удаа эхэл 9-
 - ~~ээ~~ 1 удаа орох ёстой. 9 удаа орсон тэр нь шууд 3-д хувааг
 хуваагдах, үндсэн 2 өөр 2 3-д хуваагдахаа 3,6 болгоод, үндсэн 2-оо
 3,0 болгоод дуусна.

Эдгээр 2 нь 3-д хуваагдах үед тэр 2-оо 3,6-ээд үндсэн эрхийг
 нь өмнө нь баталсан.

1 нь 3-д хуваагдах тэрийгээ 3-ээд үндснийг нь өмнө нь
 баталсан.

Аль нь ч 3-д хуваагдахгүй гэвэл аль 1-ээ нь ижил гэвэл
 тэр 2-оо 3,6-ээд үндснийг баталсан. Бүгд хялалтай бол

2-ийм - 1 өөр 2-ийм + 1 байна ~~1~~ авсаг хүндэтгэв

3-аад дүүн дүүн

6 үсн гэвэл.