Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	7	9	7	1	3

A1). $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (a_n - 1) \Rightarrow a_{n+1} \cdot n = (n+2)(a_n - 1)$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_{n+1} - (n+2)) \cdot n = (a_n - (n+1)) \cdot (n+2)$ болно

$a_{n+1} - (n+2) = b_{n+1}$ гэе. $b_{n+1} \cdot n = b_n \cdot (n+2)$.

$b_1 = 0$ үед $b_n = 0$ байх нь илт.

($b_1 = 0$ учир. $b_n = 0$ гэе. $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{n+2}{n} = 0$ болно)

$b_1 \neq 0$ үед $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+2}{n} \Rightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{1} =$

$= \frac{(n+1)!}{2 \cdot (n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b_n}{b_1} \Rightarrow b_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot b_1$

$\frac{n(n+1)}{2} \in Z$, $b_1 \in Z$, $\Rightarrow b_n \in Z$. $\Rightarrow$

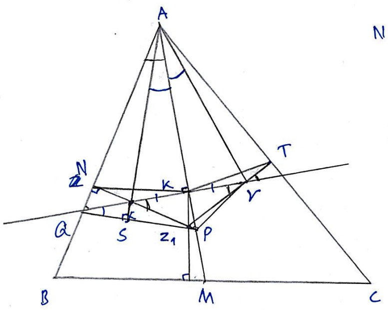
$\Rightarrow b_n = a_n - (n+1)$ нь бүхэл тоо. $\Rightarrow$ a_n нь бүхэл тоо болно.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A2

Ангилал		Шифр			Оноо
1	0	0	7	9	0

Хуудас/Нийт	
2	3



NX-г K-с BC-рүү буулгасан өндөрийн Z_1 цэгээр огтлолцдог гээд $Z_1V \perp AC$ гэж байгуулъя. $Z_1V \cap AC = T$ гэе.

M нь BC-н дундаж $\Rightarrow$ $BM = MC$.

$XK = VK$, $AM \perp XV \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NPK = \angle TPK$.

$\angle QNP = \angle QKP \Rightarrow$ QNKP багтсан 4 өнцөгт. $\Rightarrow$ $\angle NQK = \angle NPK = \angle TPK$.

$\angle AQK = \angle APV \Rightarrow$ AVPQ багтсан 4 өнцөгт

$AX \cap PQ = S$ гэе $\angle SQK = \angle SAK \Rightarrow$ SQAK багтсан 4 өнцөгт $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ASQ = 90° \Rightarrow$ X нь APQ гурвалжны ортo төв

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал: 1 0 Шифр: 0 7 9 Оноо: 0 Хуудас/Нийт: 3 3

$a^2 < b^3 < c^4 < d^5$

$b^3 - a^2 = c^4 - b^3 = d^5 - c^4 = d_1$ гэе.

$c^4 - a^2 = 2d_1$, $A^2 \equiv 0, 1 (4) \Rightarrow c^4 - a^2 \vdots 4 \Rightarrow 2d_1 \vdots 4 \Rightarrow d_1 \vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \equiv b \equiv c \equiv d \ (2)$ болно.

$(a, b, c, d) = k$ гэе. $p^{\infty} \nmid k$

$a = a_1 \cdot k$

$b = b_1 \cdot k$ $(a_1, b_1, c_1, d_1) = 1$.

$c = c_1 \cdot k$.

$d = d_1 \cdot k$.

$a_1^2 < k \cdot b_1^3 < k^2 \cdot c_1^4 < k^3 \cdot d_1^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + k^2 \cdot c_1^4 = 2k \cdot b_1^3 \Rightarrow a_1^2 \vdots k$. (1)

$(p \mid k$ гэе. $\Rightarrow a_1 \vdots p \Rightarrow a_1^2 \vdots p^2)$

$k \cdot b_1^3 + k^3 \cdot d_1^5 = 2k^2 \cdot c_1^4 \Rightarrow b_1^3 + k^2 \cdot d_1^5 = 2k \cdot c_1^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1^3 \vdots k \Rightarrow a_1^2 + k^2 \cdot c_1^4 = 2k \cdot b_1^3 \vdots k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 \vdots k^2 \Rightarrow a_1 \vdots k$.

$a_1 = k \cdot a_2$ гэе.

$a_2^2 \cdot k < b_1^3 < k \cdot c_1^4 < k^2 \cdot d_1^5$

$b^3 = a^2 + d_1$, $c^4 = a^2 + 2d_1$ $d^5 = a^2 + 3d_1$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал Шифр: 1 0 2 9 2 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 4

$a, b, c > 0.$

$$a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2} \geq ab+bc+ca.$$

$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$ гэж баталья. $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{2}\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2-c^2)^2\right) \geq 0$. үнэн.

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = \frac{1}{2}a^2(b^2+c^2)+\frac{1}{2}b^2(a^2+c^2)+\frac{1}{2}c^2(a^2+b^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}a^2(b+c)^2+\frac{1}{4}b^2(a+c)^2+\frac{1}{4}c^2(a+b)^2 \quad (\Leftrightarrow)$$

$(\Leftrightarrow)\ b^2+c^2 \geq \frac{1}{2}(b+c)^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad (b-c)^2 \geq 0$ үнэн.

Учраас $a^4+b^4+c^4 \geq \frac{1}{4}a^2(b+c)^2+\frac{1}{4}b^2(a+c)^2+\frac{1}{4}c^2(a+b)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2} \geq \left(\frac{1}{4}a^2(b+c)^2+\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4}b^2(a+c)^2+\frac{b^2}{(a+c)^2}\right)+\left(\frac{1}{4}c^2(a+b)^2+\frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^4}+2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}b^4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}c^4} = a^2+b^2+c^2 \text{ болно.}$$

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \ (\Leftrightarrow)\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$ үнэн.

Иймд $a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2} \geq a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

болж баталагдав. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл :

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow a=b=c$,

$\frac{1}{4}a^2(b+c)^2 = \frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}a^2\cdot 4a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^4 = 1 \Rightarrow a^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

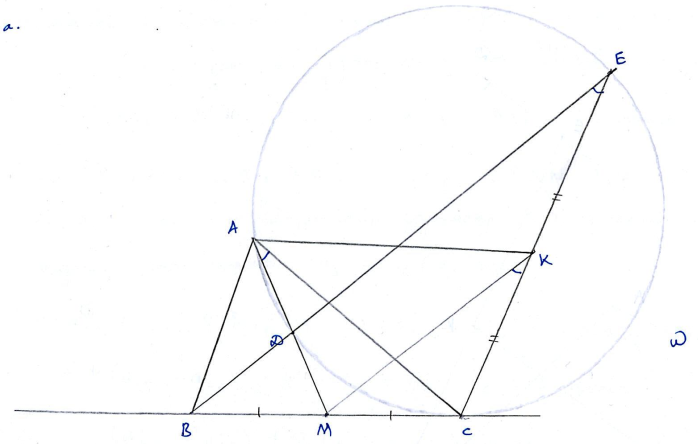
$a=b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б2

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	9	2	7	2	4

а.



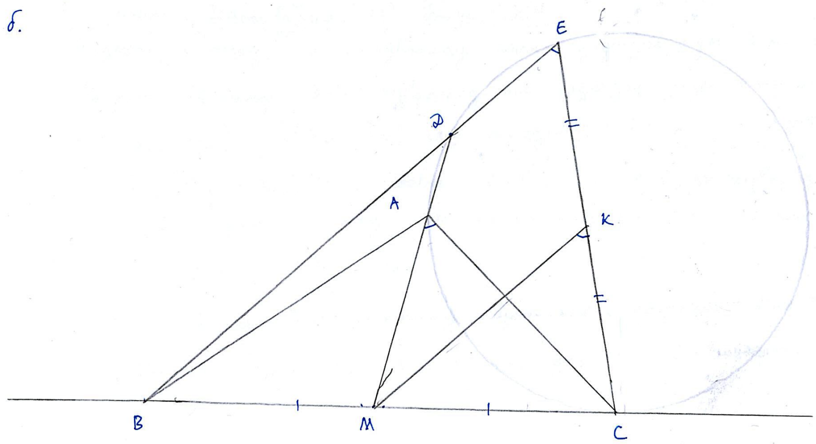
CE хэрчмийн дундажыг K гэе. $\Rightarrow$ $CK = KE$

ADCE 4 өнцөгт ω тойрогт багтана. $\Rightarrow$ $\angle MAC = \angle BEC$.

BC-н дундаж M, CE-н дундаж K, $\Rightarrow$ MK нь BCE гурвалжны дундаж шугам. $\Rightarrow$ $MK \parallel BE$. $\Rightarrow$ $\angle BEC = \angle MKC$

Үүнээс $\angle MAC = MKC$. $\Rightarrow$ MAKC 4 өнцөгт тойрогт багтана. $\Rightarrow$ Батлагдав.

б.



CE-н дундаж нь K. $\Rightarrow$ MK нь BCE гурвалжны дундаж шугам. $\Rightarrow$

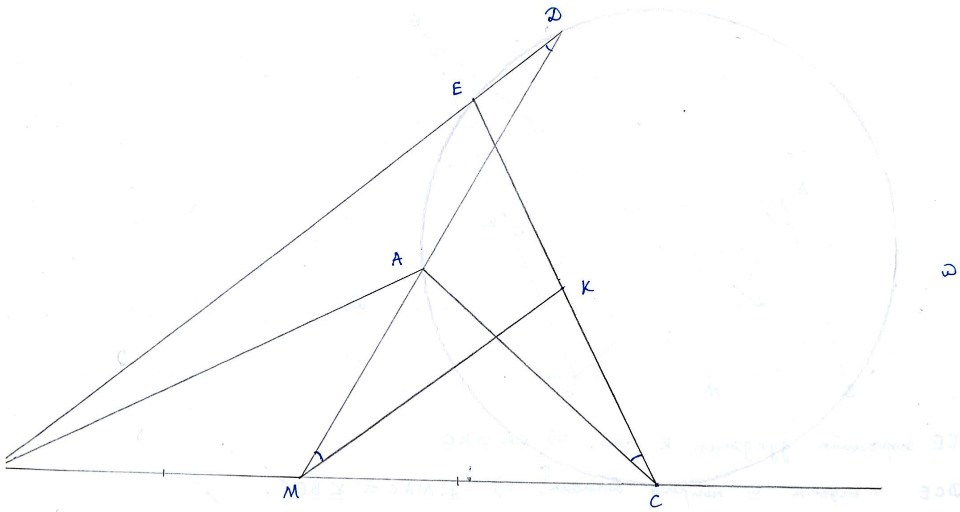
$\Rightarrow MK \parallel BE \Rightarrow \angle BEC = \angle MKC$.

ADEC тойрогт багтана. $\Rightarrow \angle BEC + \angle DAC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEC = 180^\circ - \angle DAC = \angle MAC \Rightarrow \angle MAC = \angle MKC = \angle BEC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ MAKC 4 өнцөгт тойрогт багтана. Батлагдав.

B.



CE-н дундаж K. $\Rightarrow$ MK нь BCE гурвалжны дундаж шугам. $\Rightarrow MK \parallel BE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMK = \angle BDM$, AEDC нь тойрогт багтана. $\Rightarrow \angle EDA = \angle ECA. \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMK = \angle ECA = \angle ACK \Rightarrow$ MAKC тойрогт багтана. $\Rightarrow$ Батлагдав.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
10	0	2	9	2	5	3	4

+2 = 7 оноо. оноо. (орлуулах нь тодорхой)

Ялгаатай 10 үсгээс 1-р үсэг a_1 удаа, 2-р үсэг a_2 удаа, ..., 10-р үсэг a_{10} удаа орсон гэе. Тэгвэл амар нь

$0\cdot a_{i_1} + \cancel{4}\cdot a_{i_2} + \dots + 8a_{i_9} + 9a_{i_{10}} \vdots 9$ байвал болно.

($a_1, a_2, \dots a_{10} \geq 0$, $i_1, i_2, \dots i_{10}$ нь $1, 2, \dots 10$-н сэлгэмэл).

$a_1, a_2, \dots a_{10}$ – ийн "Дирихлейн зарчмаар 9-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олдоно. $a_5 \equiv a_6 (9)$ гэе. ✓

$0\cdot a_{i_1} + \dots + 9a_{i_{10}} \vdots 9 \Rightarrow (a_{i_2} - a_{i_9}) + 2\cdot(a_{i_3} - a_{i_8}) + 3(a_{i_4} - a_{i_7}) + 4(a_{i_5} - a_{i_6}) \vdots 9$ $\quad i_5 = \cancel{6}5 \quad i_6 = 6$ байг.

$(a_{i_2} - a_{i_9}) + 2(a_{i_3} - a_{i_8}) + 3(a_{i_4} - a_{i_7}) \vdots 9$

Үлдсэн 8 тоонд 9-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олддог гэе.

$a_2 \equiv a_9 (9)$ гэе. ~~$i_2 = 2$~~,

Үлдсэн 6 тоонд 9-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олддог гэе.

$a_3 \equiv a_8 (9)$ гэе. $i_3 = 3$, $i_8 = 8$, $i_2 = 2$, $i_9 = 9$ гэе.

$a_{i_4} - a_{i_7} \vdots 3$ үлдсэн 4 тоонд 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгөх 2 тоо байна. $\Rightarrow$ болно. ✓✓.

Үлдсэн 6 тоонд 9-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олдохгүй гэе.

Үлдсэн 6 тоонд 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо байдаг гэе. a_{i_4}, a_{i_7} гэе.

(i_4, i_7), (i_7, i_4) гэж оруулъя, $i_2 = 2$, $i_9 = 9$.

$2\cdot(a_{i_3} - a_{i_8}) + 3$ эсвэл $2(a_{i_3} - i_8) + 6$; (9-т хуваагдана)

Одоо үлдсэн 4 тоонд 3-т ижил үлдэгдэл өгөх 2 тоо байна. a_{i_3}, a_{i_8} – аар авна. $\Rightarrow$ болно. ✓✓

Үлдсэн 6 тоо 3-т хуваахад бүгд ижил үлдэгдэл өгнө гэе. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 9-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгөх 2 тоо олдоно. ∅.

4 5 2 7

$(a_1 \equiv a_2)$ $(a_3 \equiv a_4)$ $a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}$

$(a_1 \equiv a_2$ $a_3 \equiv a_4$ $a_5 \equiv a_6)$ $a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}$

4 5 2 7 1 8

Одоо үлдсэн 8 тоонд 9-т ижил үлдэгдэл өгөх 2 тоо байхгүй үед.

$(0, 1, 2, 3, \ldots, \cancel{7})$ үед. ~~...~~ (Энэ нь үлдсэн 8 тооны 9-т хуваахад гарах үлдэгдэл). $a_{i_2} \equiv 0\ (9)$, $a_{i_9} \equiv 3\ (9)$, $a_{i_3} \equiv 7\ (9)$, $a_{i_8} \equiv 1\ (9)$

$a_{i_4} \equiv 2\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 5\ (9)$ байхаар авна. $1 \cdot 0 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5$

$(0, 1, 2, \ldots 6, 8)$ үед. $a_{i_2} \equiv 0(9)$ $a_{i_9} \equiv 6\ (9)$ $a_{i_3} \equiv 4\ (9)$ $a_{i_8} \equiv 1\ (9)$

$a_{i_4} \equiv 2\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 5\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 1\ (9)$, $a_{i_9} \equiv 7(9)$, $a_{i_3} \equiv 3(9)$,

$a_{i_8} \equiv 0\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 2\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 5\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 0\ (9)$ $a_{i_9} \equiv 6\ (9)$ $a_{i_3} \equiv 1\ (9)$

$a_{i_8} \equiv 4\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 3\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 2\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 0(9)$, $a_{i_9} \equiv 3\ (9)$,

$a_{i_3} \equiv 7\ (9)$, $a_{i_8} \equiv 1\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 2\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 5\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 0\ (9)$, $a_{i_9} \equiv 6\ (9)$,

$a_{i_3} \equiv 4\ (9)$, $a_{i_8} \equiv 1\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 2$, $a_{i_7} \equiv 5\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 0\ (9)$, $a_{i_9} \equiv 3\ (9)$

$a_{i_3} \equiv 1(9)$, $a_{i_8} \equiv 4\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 5\ (9)$, $a_{i_7} \equiv 8\ (9)$ байхаар авна.

$(0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 0\ (9)$ $a_{i_9} \equiv 3\ (9)$

$a_{i_3} \equiv 2\ (9)$ $a_{i_8} \equiv 5\ (9)$, $a_{i_4} \equiv 4\ (9)$ $a_{i_7} \equiv 7\ (9)$ байхаар авна.

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ үед $a_{i_2} \equiv 1\ (9)$, $a_{i_9} \equiv 4\ (9)$

$a_{i_3} \equiv 2\ (9)$ $a_{i_8} \equiv 5\ (9)$ $a_{i_4} \equiv 3\ (9)$ $a_{i_7} \equiv 6\ (9)$ байхаар авна.

Бодлого бодогдов.