Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа **A1**

Ангилал 10 Шифр 068 Оноо 6 Хуудас/Нийт 1 3

$a_1 \in \mathbb{Z}$ цед.

$a_2 = \frac{3}{1} \cdot a_1 = 3a_1 \in \mathbb{Z}$ үнэн.

$a_3 = \frac{4}{2} \cdot a_2 = 2a_2 = 6a_1 \in \mathbb{Z}$ үнэн.

Индукцилэе.

a_n-бөлон түүнээс өмнөх бүх цед үнэн гэе. ~~Бүлээ~~ бүгд бүхэл Пэгвэл.

$n = 2k+1$ цед. $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_n - 1)$ энэ бүхэл байхын тулд.

$(a_n - 1)$ нь n-д хуваагдах ёстой

$\mathbb{Z} \in a_n - 1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot (a_{n-1} - 1) - 1 = \frac{n(a_{n-1}-1) - a_{n-1} - \cancel{1} - n + \cancel{1}}{n-1} \equiv \frac{-a_{n-1}}{n-1}$ (n)

$(n; n-1) = 1$ тул.

$a_n - 1 \equiv \frac{a_{n-1}}{n-1} \equiv a_{n-1} (n)$

$a_{n-1} = \frac{n}{n-2}(a_{n-2} - 1) \equiv n(a_{n-2} - 1) \equiv 0 (n)$ болж өмнөх зүйл батлагдав.

$(n; n-2) = 1$ учир. n-ын $n-2$ ын хуваагчид хуваахгүй тул n нь үржвэрт агуулагдана.

$n = 2k$ цед.

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_n - 1) = \frac{2k+2}{2k}(a_n - 1) = \frac{k+1}{k}(a_n - 1)$ гэдгээс.

байхын тулд

$a_n - 1$ нь $\mathbb{Z}$ k-д хуваагдах ёстой.

$a_n - 1 = \frac{n(a_{n-1} - 2) - a_{n-1}}{(n-1)} \equiv a_{n-1} (k)$

$(\frac{n}{2}; n-1) = 1$ тул $\Rightarrow$

$a_{n-1} = \frac{n}{n-2}(a_{n-2} - 1) = \frac{2k}{(k-1)2}(a_{n-2} - 1) \equiv \frac{k}{k-1}(a_{n-2} - 1) \equiv 0 (k)$

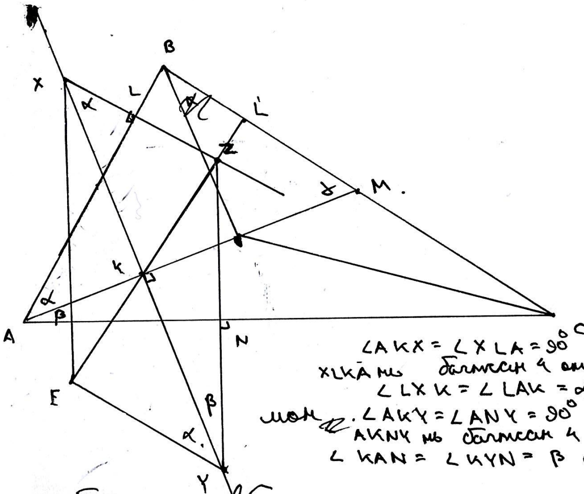
$(k; k-1) = 1$ байна.

болж өмнөх зүйл батлагдав.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A2

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	6	8	7	2	3



$\angle BMA = \gamma$ гэе.

$\angle AKX = \angle XLA = 90^\circ$ байх тул
XLKA нь багтсан 4 өнцөгт болно
$\angle LXK = \angle LAK = \alpha$ болно.
мөн $\angle AKY = \angle ANY = 90^\circ$ тул
AKNY нь багтсан 4 өнцөгт болно
$\angle KAN = \angle KYN = \beta$ болно.

$XK = EK$ байхаар авбал.

$\begin{cases} XK = EK \\ XK = KY \\ \angle XKZ = \angle EKY \end{cases}$ босоо өнцгүүд $\Rightarrow$ ТӨТ шинжээр $\triangle XKZ = \triangle EKY$ болно. Чухээс $\angle KXZ = \angle KYE = \alpha$ болно. мөн $\underset{(1)}{XZ = EY}$ байна.

$\triangle XZY$ дээр Синусын теоремоор
$\frac{XZ}{\sin\beta} = \frac{ZY}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{XZ}{ZY} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow$ (1) ёсоор $\frac{EY}{ZY} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ байна.

$\triangle ABM$ дээр Синусын теоремоор
$\frac{BM}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma}$
$BM \cdot \sin\gamma = AB \cdot \sin\alpha$

$\triangle AMC$ дээр
$\frac{MC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin 180-\gamma}$
$MC \cdot \sin 180 - \gamma = AC \cdot \sin\beta$

BI

$BM \cdot \sin\gamma = MC \cdot \sin 180 - \gamma$
$AB \cdot \sin\alpha = AC \cdot \sin\beta$
$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AB}{AC}$ болно;

$\left.\begin{array}{l} \angle EYZ = \alpha + \beta = \angle BAC \\ \frac{EY}{ZY} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AB}{AC} \end{array}\right\}$ ТӨТ шинжээр $\triangle EYZ \sim \triangle ABC$ болно. Чухээс. $\angle MCA \underset{(2)}{=} \angle EZY$ болно.

~~$\angle AMB = 180 - \angle CAM - \angle MCA = 180 - \beta - \angle MCA$~~
$\angle AMB = \angle MAC + \angle MCA = \beta + \angle MCA$
(2)-оор $\angle XKZ = \angle KYZ + \angle KZY = \beta + \angle MCA$
$\angle L'KM = 90 - \cancel{\beta - \angle MCA} - \angle XKZ = 90 - \beta - \angle MCA$.

$\Rightarrow \angle KL'M = 180 - \angle L'KM - \angle AMB =$
$= 180 + \cancel{\beta} + \cancel{\angle MCA} - 90 - \cancel{\beta} - \angle MCA = 90$ болно батлагдав.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал		Шифр			Оноо
1	0	0	6	8	0

Хуудас/Нийт: 3 | 3

Арифметик прогресс үүсгэдэг бол.

$a^2+(q)=b^3$
$a^2+(2q)=c^4$
$a^2+(3q)=d^5$

$a^2+q+a^2+3q=2(a^2+2q)=2c^4=b^3+d^5$

$\cancel{2c^4=b^3+d^5 \geq b^3+c^4}$

$\cancel{c^4>b^3.}$

$2c^4=b^3+d^5$

$\cancel{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}}$

0

1.

$\cancel{(\pm 1)^4 \equiv 1\ (3)}$ ~~гэдгээс.~~

$\cancel{c \not\equiv 0 (3)}$ ~~үед~~

$\cancel{2c^4 \equiv 2\cdot 1 \equiv 2 \equiv b^3+d^5\ (3)}$

b^3

$b^3 \equiv a^2\ (q)$
$c^4 \equiv a^2\ (q)$
$d^5 \equiv a^2\ (q)$

$\cancel{a^2-c^4}$

$\frac{c^4-a^2}{2}=q.$

$b^3=a^2+\frac{c^4-a^2}{2}=\frac{c^4+a^2}{2}$

$d^5=a^2+\frac{3(c^4-a^2)}{2}=\frac{3c^4-a^2}{2}.$

$\frac{3c^4 - a^2 - c^4 - a^2}{2}.$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
1 0	2 8 1	7	1 3

$a; b; c \ge 0.$

$$a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2} \ge ab+bc+ac.$$

Кошигоор багасгавал.

$$\left(a^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)+\left(b^4+\frac{b^2}{(c+a)^2}\right)+\left(\frac{c^2}{(a+b)^2}+c^4\right) \ge 2\left(\sqrt{\frac{a^6}{(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^6}{(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^6}{(a+b)^2}}\right) =$$

$$2\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\right)$$ болно.

~~Одоо~~

Одоо

$$2\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\right) \ge ab+bc+ac$$ гэж батлахад болно.

батлах тэнцэтгэл бишийн 2 талыг $(ab+bc+ac)$-ээр үржүүлбэл.

1) $$2(ab+bc+ac)\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\right) \ge (ab+bc+ac)^2$$ гэж батлахад болно.

$$\left((ab+bc)+(bc+ac)+(ab+ac)\right)\left(\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{ba+bc}+\frac{c^4}{ac+bc}\right) \ge$$

$x_1 = ab+ac$ $\quad x_2 = bc+ac$ $\quad x_3 = ab+bc$

$y_1 = \frac{a^4}{ab+ac}$ $\quad y_2 = \frac{c^4}{bc+ac}$ $\quad y_3 = \frac{b^4}{ab+bc}$ хоёр цувааны хувьд Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээр.

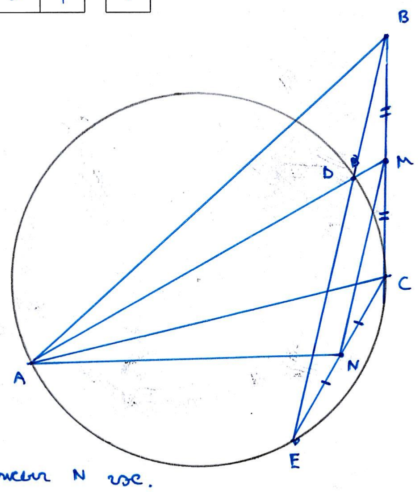
$$\left(\sqrt{\frac{a^4(ba+ac)}{ab+ac}}+\sqrt{\frac{b^4(ab+bc)}{ab+bc}}+\sqrt{\frac{c^4(ac+bc)}{ac+bc}}\right)^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 \ge$$ Кошигоор дахин багасгавал.

$$\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}\right)^2 \ge (ab+bc+ac)^2$$ болно (1) тэнцэтгэл биш батлагдаж бодлого батлагдав.

Тэнцэлдээ $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ үед хүрнэ.

Ангилал		Шифр			Оноо
1	0	2	8	1	7

Хуудас/Нийт: 2 3



CE-ийн дундажыг N гэе.

Тэгвэл. AMCN нэг тойрог дээр оршино гэвэл бодлого батлагдана.

~~BC-талын дундаж M~~

$\frac{MC}{BC} = \frac{CN}{CE} = \frac{1}{2}$
$\angle BCE$ ерөнхий } ТӨТ шинжээр $\triangle CMN \sim \triangle BCE$ болно.
Үүнээс $\angle MCN = \angle BEC = \angle DEC$ болно.

Нөгөө талаас $\overset{\frown}{CD}$ тулсан $\angle DAC = \angle DEC$ гэдгээс

$\angle DAC = \angle DEC = \angle MCN$

$\angle DAC = \angle MCN$ болж ижил нумд тулсан өнцгүүд гэдгээс AMCN нь багтсан 4 өнцөгт болж ~~батлах~~ олох зүйл батлагдов.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал		Шифр			Оноо
1	0	2	8	1	0

Эсрэгээр нь чаддаггүй гэе.

Хуудас/Нийт: 3 | 3

10 үсгийнхээ үзэнд орсон тоог харгалзан $a_1; a_2; \dots; a_{10}$ гэе.

Тэгвэл. солигдсон цифрүүдийг ~~$b_1; b_2; \dots;$~~ харгалзан $b_1; b_2; b_3; \dots; b_{10}$ гэе.

9-д хуваагдах тооны шинжээр уг тооны цифрүүдийн нийлбэр 9-д хуваагдах ёстой

$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_{10} \cdot b_{10} \equiv 0\ (9)$ байна.

~~$a_1; a_2; \dots;$~~

$a_1 \equiv c_1\ (9)$

$a_2 \equiv c_2\ (9)$

$\dots$

$a_{10} \equiv c_{10}\ (9)$ гэвэл.

$c_1; c_2; \dots; c_{10} \in [-4; 4]$ байна олбогүй!

$c_1; c_2; \dots; c_{10} \in \mathbb{Z}$

$c_1 \cdot b_1 + \dots + c_{10} \cdot b_{10} \equiv 0\ (9)$ байна.

~~үзүүлэх~~.

~~Дирихлейн~~

9ш ~~?~~ үлдэгдлээ хайрцаг 10 үсгээ туулай гэвэл Дирихлейн зарчмаар ~~үсгүүд 2ш үлдэгдэл 2 ижил~~ үлд ижил үлдэгдэл оноох 2ш үсэг олдоно.

(1; ~~8~~8)
(2; ~~7~~7)
(3; ~~6~~6)
(4; ~~5~~5) эдгээр ~~хос~~ хос дахь 2 тоог эсрэг тоо гэе. Тэгвэл.

$c_1; \dots; c_{10}$-ын бүгд ижил эрхтэй учир.

$c_1 \equiv c_2\ (9)$ гэе. Тэгвэл.

дурын хоёр эсрэг цифрээр соливол. нийлбэр нь 9-д хуваагдана.

~~$c_1 \cdot b_1$~~. $b_1; b_2$-ын 0; 9 байг.

$b_1 = 0 \quad b_2 = 9$.

$c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + \dots + c_{10} \cdot b_{10} \equiv c_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot (-b_1) + c_3 \cdot b_3 + c_4 \cdot b_4 + \dots + c_{10} \cdot b_{10} \equiv$

$c_3 \cdot b_3 + c_4 \cdot b_4 + \dots + c_{10} \cdot b_{10} \equiv 0\ (9)$ байх ~~байна~~ ёстой байна.

~~I) $c_3 \neq c_4$. c_3-аас c_{10}-дахь бүх тоог ялгаатай гэе. $c_3 \neq 0$ … $c_{10} \neq 0$. Тэгвэл.~~

~~$c_3 \neq -c_4$ үлдсэн 8 тоо бүгд~~

~~$c_5 = -c_6$~~

$c_3; \ldots; c_{10}$ хүртэлх тоогоо.

$c_3 = d_3 + e_3$

$c_4 = d_4 + e_4$

$\ldots$

$c_{10} = d_{10} + e_{10}$ байг.

$d_3 \cdot b_3 + \ldots + d_{10} \cdot b_{10} \equiv -k(\vartheta)$

~~Тэгээд $b_3 \equiv -b_k(\vartheta)$ байх эрэг тоонуудын хаа байрыг сольвол.~~

~~$d_3 \cdot b_k + \ldots + d_{10} \cdot b_i \equiv -k$ байна.~~

~~$e_3 \cdot b_3 + \ldots + c_{10} \cdot b_{10} \equiv -k(\vartheta)$~~