Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	8	6	6	1.	3

Ямарваа нэг n_{k+1}-нь бүхэл биш гэе.

$$n_{k+1}=\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k}{k-2}\cdots\frac{6}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}(a_1\cancel{-2}\ 1)-\left(\frac{k+2}{k}\left(\frac{k+1}{k-1}\left(\dots\frac{6}{4}\left(\frac{5}{3}\left(\frac{4}{2}+1\right)+1\right)\dots+1\right)+1\right)=\frac{(k+2)(k+1)(a_1-1)}{2}-\left(\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k}{k-2}\cdots\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}+\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k}{k-2}\cdots\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}+\dots+\frac{k+2}{k}\cdot\frac{k+1}{k-1}+\frac{k+2}{k}\right)=\frac{(k+2)(k+1)(a_1-1)}{2}-$$

$$-\left(\frac{(k+2)(k+1)}{\cancel{k(k-1)}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{(k-2)(k-1)}+\frac{1}{(k-1)k}\right)+\frac{k+2}{k}\right)\quad(1)$$

Энд $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{(k-2)(k-1)}+\frac{1}{(k-1)k}=\frac{(2-1)(2+1)+1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+$

$+\frac{1}{(k-2)(k+1)}+\frac{1}{(k-1)k}=\frac{2^2}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{(k-1)k}=\frac{(3-1)(3+1)+1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots\frac{1}{(k-1)k}=$

$=\dots=\frac{(k-2)(k)+1}{(k-1)k}=\frac{(k-1)^2}{(k-1)k}=\frac{k-1}{k}\quad(2)$

(1)-т (2)-г орлуулбал

$$n_{k+1}=\frac{(k+2)(k+1)(a_1-1)}{2}-\left(\frac{(k+2)(k+1)}{\cancel{k(k-1)}}\cdot\frac{(k-1)}{k}+\frac{k+2}{k}\right)=$$

$$=\frac{(k+2)(k+1)(a_1-1)}{2}-\left(\frac{k+2}{k}\left((k+1)(k-1)+1\right)\right)=$$

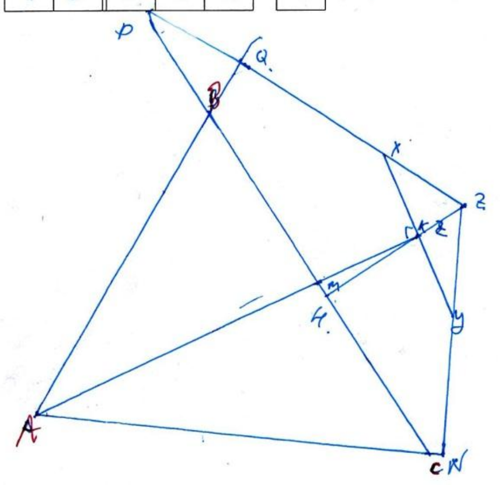
$$=\frac{(k+2)(k+1)(a_1-1)}{2}-(k+2)\cdot k$$

Энд $k+2,\ k+1$ дараалсан 2 натурал тоо тул аль нэг нь 2-т хуваагдана. Иймээс $n_{k+1}\in Z$ болж зөв ба ямарваа нэг n_{k+1} нь бүхэл биш гэдэгтэй зөрчилдөх тул уг дараалалд бүхэл биш тоо байхгүй.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A2

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	0	8	6	4 +3 = 7.	2.	3



$\angle AQX + \angle XKA = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AQXK хөшөө бөгөөс багтана. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QXK = 180° - \angle QAK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZXY = \angle QAK$

$\angle AKY + \angle YNA = 180° \Rightarrow$

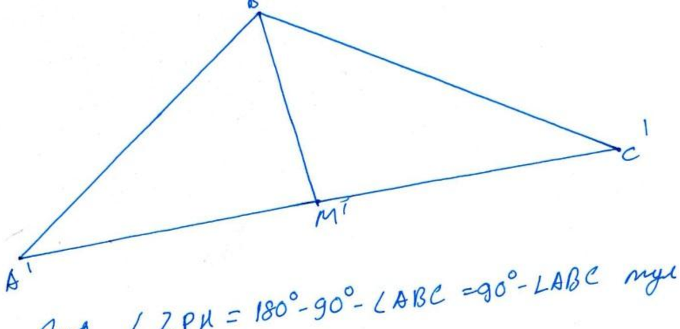
$\Rightarrow$ AKYN тойрог багтана $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KYN = 180° - \angle KAN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZYX = \angle KAN$ ✓

Энд нэгэн хувиргалт хийе $\triangle ABC$-г AM-р хуваан BM, MC-р нийлүүлэн тавья. Үүсэх дүрс маань гурвалжин болох нь илт. Учир нь ?

$BM = MC$, $\angle BMA = 180° - \angle AMC$. Эндээс ~~$\triangle AB$~~ үг гурвалжнаа $\triangle A'B'C'$ ба $B'M'$ медиан ($A'C' = 2AM = 2A'M' = 2M'C'$)-тай гэе. Эндээс $\triangle A'B'C' \sim \triangle XZY$ ба медиан давхцах тул $\angle XZH = \angle ABC$.



$\angle ZHP = 180° - \angle XZH - \angle ZPH = 90°$.

Эндээс $\angle ZPH = 180° - 90° - \angle ABC = 90° - \angle ABC$ тул

Ангилал Шифр 1 0 0 8 6

Оноо 0

Хуудас/Нийт 3 3

$a^2 < b^3 < c^4 < d^5$

Эндээ ~~$a^2=$~~ $b^3-a^2=e$ гэе.

$a^2=a^2$

$b^3=a^2+e$

$c^4=a^2+2e$

$d^5=a^2+3e$

Эндээ $a^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$

$c^4\equiv 0,1 \pmod 8$ тул ямагт $e\equiv 0 \pmod 2$

0.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	9	9	7	1.	3

$$=a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}=\Big(\frac{a^4}{4}+2\overset{①}{\Big(\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{c^4}{16}\Big)}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{c^4}{16}+\frac{c^4}{16}\Big)$$

$$+\Big(\frac{b^4}{4}+2\overset{②}{\Big(\frac{b^4}{16}+\frac{b^4}{16}+\frac{b^4}{16}+\frac{a^4}{16}\Big)}+\frac{b^4}{16}+\frac{b^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}\Big)+\Big(\frac{c^4}{4}+2\overset{③}{\Big(\frac{c^4}{16}+\frac{c^4}{16}+\frac{c^4}{16}+\frac{b^4}{16}\Big)}+$$

$$+\frac{c^4}{16}+\frac{c^4}{16}+\frac{b^4}{16}+\frac{b^4}{16}\Big)+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}$$ гэе.

Кошийн тэнцэтгэл бишээр:

$$\Big(\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16}+\frac{c^4}{16}\Big)\geq\frac{2a^3c}{4}\ ;\quad \frac{a^4}{16}+\frac{c^4}{16}\geq\frac{2a^2c^2}{16}\quad(1)$$

(1)-г (I) хаалтанд орлуулбал: Кошийн тэнцэтгэл бишээр:

$$(\text{I})\geq\frac{a^4}{4}+\frac{2a^3c}{4}+\frac{a^4+2a^2c^2+c^4}{16}\ (i)\qquad \frac{(a^2+c^2)^2}{16}\geq\frac{(2ac)^2}{16}=\frac{a^2c^2}{4}.\ (2)$$

(2)-г (i)-т орлуулбал: $I\geq\frac{a^4}{4}+\frac{2a^3c}{4}+\frac{a^2c^2}{4}=\frac{a^2(a+c)^2}{4}.$

Дээрхтэй адилаар (II) болон (III)-г багасгавал

$$(\text{II})\geq\frac{b^2(a+b)^2}{4}\qquad(\text{III})\geq\frac{c^2(b+c)^2}{4}.$$

Эндээс $A\geq\frac{a^2(a+c)^2}{4}+\frac{b^2(a+b)^2}{4}+\frac{c^2(b+c)^2}{4}+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}$

Коши тэнцэтгэл бишээр:

$$\frac{a^2(a+c)^2}{4}+\frac{b^2}{(a+c)^2}\geq2\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}}=ab\qquad \frac{c^2(b+c)^2}{4}+\frac{a^2}{(b+c)^2}\geq2\cdot\sqrt{\frac{a^2c^2}{4}}=ac.$$

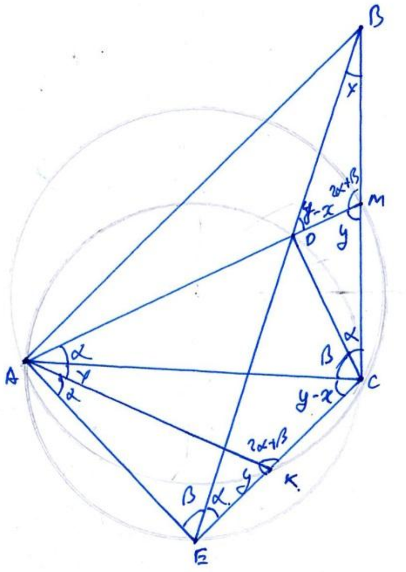
$$\frac{b^2(a+b)^2}{4}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\geq2\cdot\sqrt{\frac{b^2c^2}{4}}=bc$$

Эндээс $A\geq ab+bc+ca$▲

Тэнцэтгэл биш $a=b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

✓

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	9	9	7	2	3



$\angle MCD=\alpha$, $\angle DCA=\beta$, $\angle DMC=y$

$\angle MBD=x$ гэе. $\Rightarrow$

BC шүргэгч тул $\angle DAC=\angle DEC=\angle MCD=\alpha$ ✓

DCEA тойрог багтсан тул $\angle DCA=\angle DEA=$

AMCK тойрог багтсан тул $\angle CKA=180^\circ-y$

$\Rightarrow \angle CKA=2\alpha+$

$\Rightarrow \angle AKE=180^\circ-\angle CKA=y$

$\triangle AMC$-н хувьд: $2\alpha+\beta+y=180^\circ$

$\angle KAE=180^\circ-y-\alpha-\beta=\alpha$

Эндээс $\begin{cases}\angle KAE=\angle MAC\\ \angle AKE=\angle AMC\\ \angle AEK=\angle ACM\end{cases} \Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle AMC$

$\angle ACE=180^\circ-2\alpha-\beta-x=y-x$

$\angle CAK=180^\circ-y+x-2\alpha-\beta=x.$

$\angle BMD=180^\circ-y=2\alpha+\beta$

$\angle BDM=180^\circ-x-2\alpha-\beta=y-x$

Эндээс $\begin{cases}\angle CAK=\angle DBM\\ \angle ACK=\angle BDM\\ \angle CKA=\angle DMB\end{cases} \Rightarrow \triangle AKC \sim \triangle BMD$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AKE \sim \triangle AMC \Rightarrow \dfrac{EK}{MC}=\dfrac{AK}{AM} \Rightarrow AK=\dfrac{EK\cdot AM}{MC}\\ \triangle AKC \sim \triangle BMD \Rightarrow \dfrac{KC}{DM}=\dfrac{AK}{BM} \Rightarrow AK=\dfrac{KC\cdot BM}{DM}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EK\cdot AM}{MC}=\frac{KC\cdot BM}{DM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EK}{KC}=\frac{MC\cdot BM}{AM\cdot MD}=\frac{MC^2}{AM\cdot MD}=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow EK=KC$ ▪

Энд BC шүргэгч тул MC шүргэгч нь илт. Иймд шүргэгч огтлогчийн теоремоор $MC^2=AM\cdot MD$.

Баталгаа:

$\angle MDC=180^\circ-\alpha-y=\alpha+\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\angle AMC=\angle CMD\\ \angle MCA=\angle MDC\\ \angle MAC=\angle MCD\end{cases} \Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MCD \Rightarrow \dfrac{MD}{MC}=\dfrac{MC}{AM} \Rightarrow MD\cdot AM=MC^2$ ▪

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
1	0	2	9	9	0	3	3

Ялгаатай цифрүүд $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(1 \le n \le 10)$ байсан гэе. Зүгээр $x_1k_1+x_2k_2+\ldots+x_nk_n \vdots 9$ байх ёстой ба $x_1, x_2, \ldots x_n$ нь $(0,1,2\ldots,8,9)$-н сонголтууд

$x_1k_1+x_2k_2+\ldots+x_nk_n \equiv a \pmod 9$ гэе.

$y_1k_1+y_2k_2+\ldots+y_nk_n \equiv a \pmod 9$

хасхад $|x_1-y_1|k_1+|x_2-y_2|k_2+\ldots+(x_n-y_n|k_n \equiv 0 \pmod 9)$