Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал Шифр: 1 0 0 6 2 Оноо: 0+3=3+3=6 Хуудас/Нийт: 1 3

Б. Санжжав

Зөвшөөрсөн

Зөвшөөрөв. Т. Базар,

Эхний тохиолдлуудыг шалгая.

$n=1$ үед

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}(a_n-1) \Rightarrow a_2=\frac{1+2}{1}(a_1-1)\in\mathbb{Z}$ болно.

$n=2$ үед

$a_3=\frac{2+2}{2}(a_2-1) \Rightarrow a_3=2(a_2-1)\in\mathbb{Z}$ болно.

$n=3$ үед $a_4=\frac{3+2}{3}(a_3-1) \Rightarrow$ $5(a_3-1)\,\vdots\,3$ байхаас өөр замгүй болно.

Өөрөөр бол $n\geq 3$ үед $(n+2)(a_n-1)\,\vdots\,n$ бол гэж үз.

Индукцээр баталъя.

$n=1$ үед үнэн байсан.

$n=k$ үед $a_k=\frac{k+\cancel{2}}{k}(a_k-1)$ үнэн гээд $n=k+1$ үед баталъя.

$a_k=\frac{k+1}{k-1}(a_{k-1}-1)$-ээс харвал $k+1$-ээр заавал 0 үлдэгдэл өгнө. Үүнийг өөрөөр $a_k\equiv k+1\ (k+1)$ гэж ~~бичээд~~ болно.

Одоо орлуулбал $a_{k+1}=\frac{k+2}{k}(a_k-1)\equiv\frac{k+2}{\cancel{k}}(\cancel{k+1-1})=k+2\ (k+1)$ ~~гэж~~ болно.

Тэгвэл $a_{k+1+1}=\frac{k+1+2}{k+1}(a_{k+1}-1)\equiv\frac{k+3}{\cancel{k+1}}\cdot(\cancel{k+2-1})=k+3\ (k+1)\in\mathbb{Z}$ болж

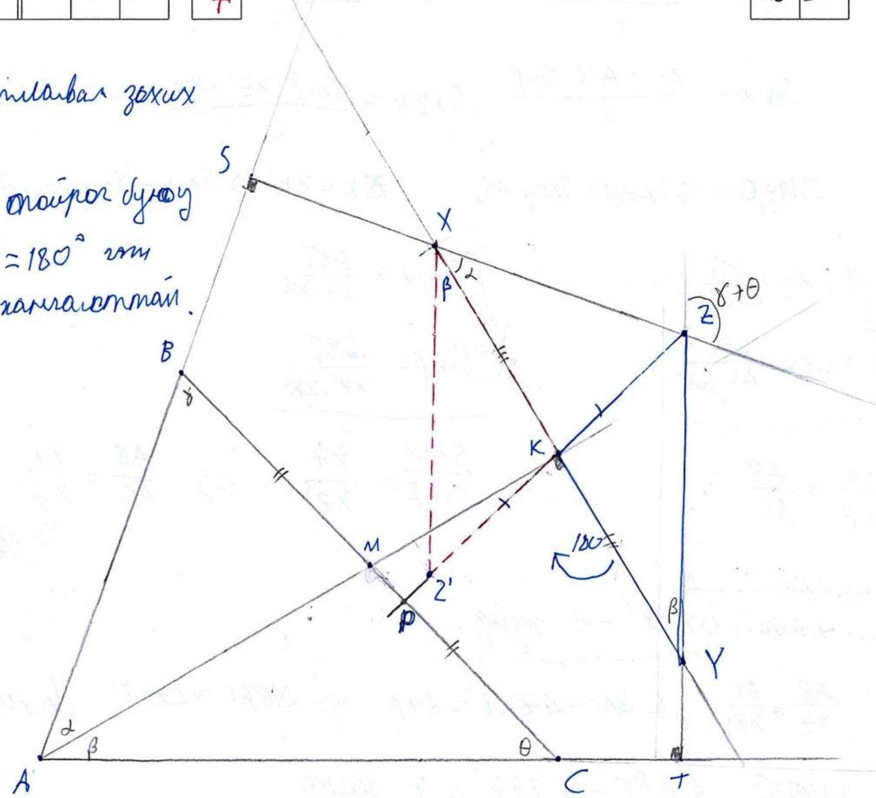
бодлого маань батлагдав.

$a_k=\frac{k+1}{k-1}(a_{k-1}-1)\in\mathbb{Z}$ учир $a_{k-1}\in\mathbb{Z}$ бол.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа **A2**

Ангилал	Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
10	062	7	2 3

Бидний батлавал зохих зүйл бол
SBPZ ⇒ 1 тойрог дээр
$\angle SBP + \angle SZP = 180^\circ$ гэж батлахад хангалттай.



① ASXK - 1 тойрог ⇒ $\angle SXK = 180 - \alpha$ ⇒ $\angle ZXK = \alpha$

② AKYT - 1 тойрог ⇒ $\angle KYT = 180 - \beta$ ⇒ $\angle ZYK = \beta$

③ $\alpha+\beta+\gamma+\theta = 180^\circ$, ② ⇒ $\angle XZY = \gamma+\theta$

④ Δ~~Z~~XKY − Z K-дээр төвлөн 180° эргүүлбэл:

$XK = YK \Rightarrow Y \to X$, $Z \to Z'$

$XZ' = YZ$, $ZK = KZ'$ болно.

$\angle KYZ = \angle KXZ' = \beta$

⑤ Одоо ΔABC, Δ XZZ' - 2-ыг авч үзвэл, ~~Талбай авбал.~~
~~Талбай авбал.~~ ~~SAB~~
~~$S_{ABC} = AB$~~

$\triangle ABC$ нь $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ гэсэн 2$\triangle$-аас тогтоно.

$\triangle XZZ'$ нь $\triangle XZK$, $\triangle XZ'K$ гэсэн 2$\triangle$-аас тогтоно.

Эндээс талбайнуудыг авбал:

$$S_{ABM} = \frac{\sin\alpha \cdot AB \cdot AM}{2} \qquad S_{XZK} = \frac{\sin\alpha \cdot XZ \cdot XK}{2}$$

$$S_{ACM} = \frac{AC \cdot AM \cdot \sin\beta}{2} \qquad S_{XZ'K} = \frac{\sin\beta \cdot XZ' \cdot XK}{2}$$

⑥ $BM = CM \Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} = S_1$, $\quad ZK = ZK' \Rightarrow S_{XZK} = S_{XZ'K} = S_2$ Яна.

⑦ $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{2S_1}{AB \cdot \cancel{AM}} \\ \sin\beta = \frac{2S_1}{AC \cdot \cancel{AM}} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2S_2}{XZ \cdot \cancel{XK}} \\ \sin\beta = \frac{2S_2}{XZ' \cdot \cancel{XK}} \end{cases}$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{XZ}{XZ'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{XZ}{XZ'} \text{ болно.}$$

$$\Downarrow \quad \frac{AB}{XZ} = \frac{AC}{XZ'}$$

⑧ ~~$\triangle ABC$, $\triangle$~~

$\triangle ABC$, $\triangle XZZ'$-н хувьд:

$\frac{AB}{XZ} = \frac{AC}{XZ'}$, $\angle BAC = \angle ZXZ' = \alpha + \beta \Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle ZXZ'$ болно.

⑨ Эндээс $\angle ABC = \angle XZZ' = \gamma$ болно.

$\begin{cases} \angle SBM = 180 - \gamma \\ \angle XZZ' = \angle SZP = \gamma \end{cases} \Rightarrow \angle SBM + \angle SZP = 180^\circ$ болм

$SBPZ$ - 1 тойрог болно.

⑩ $\begin{cases} SBPZ \text{ - 1 тойрог} \\ \angle BSZ = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle ZPB = 90^\circ$ болж $ZK \perp BC$ болж батлагдав ▲

$a^2 < b^3 < c^4 < d^5$ тоонууд ÷ байх a, b, c, d олдог гэж үзье

Тэгвэл $d^5 = a^4 + x = b^3 + 2x = a^2 + 3x$ бн.

$\cancel{d^5x} \cdot \frac{a^2+c^4}{2} = b^3$ $\Rightarrow$ a, c - 2ны 2уулаа тэгш эсвэл 2уулаа сондгой бн.

$\frac{d^5+b^3}{2} = c^4$ $\Rightarrow$ b, d - 2ны 2уулаа тэгш эсвэл 2уулаа сондгой бн.

$a^2 + d^5 = b^3 + c^4$ бн.

$a^2 + b^3 + c^4 + d^5 = 4a^2 + 6x$ болно.

$d < c < b < a$ бн.

0.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
10	275	6,5+0,5=7	1 3

$\cancel{a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}}$ ~~үржүү~~

$\cancel{a^4+b^4+c^4+\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}=A}$ ~~гэе.~~

$\frac{a^2}{(b+c)^2}$ -ыг a^2-аар, $\frac{b^2}{(a+c)^2}$ -ыг b^2-аар, $\frac{c^2}{(a+b)^2}$ -г c^2-аар үржүүлж хуваагаад өгье. Тэгвэл иим болно:

$\cancel{A=a^4+b^4+c^4+\frac{a^4}{(b+c)^2a^2}+\frac{b^4}{(a+c)^2b^2}+\frac{c^4}{(a+b)^2c^2}}=$

$$=\frac{a^4}{(b+c)^2a^2}+b^4+\frac{b^4}{(a+c)^2b^2}+c^4+\frac{c^4}{(a+b)^2c^2}+a^4 \geq$$ (кошийн т.б ашиглав)

$$\geq 2\cdot\frac{a^2b^2}{(b+c)a}+2\cdot\frac{b^2c^2}{(a+c)b}+2\frac{c^2a^2}{(a+b)c}=$$

$$=2\left(\frac{(ab)^2}{ba+ca}+\frac{(bc)^2}{ab+bc}+\frac{(ac)^2}{ac+bc}\right)\geq$$ (коши-шварц)

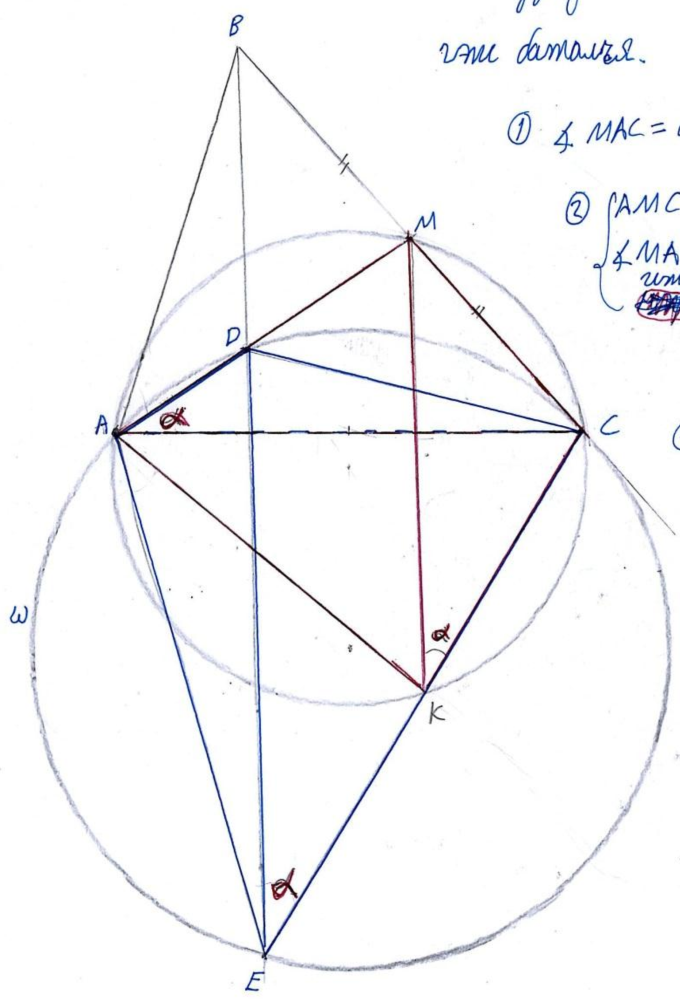
$$\geq 2\left(\frac{(ab+bc+ca)^2}{ab+ac+ab+bc+ac+bc}\right)=2\left(\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}\right)=ab+bc+ca.$$

тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл! Шварцын т/б-ийг [illegible]!

$\cancel{\frac{a^4}{(b+c)a^2}=b^4 \Rightarrow \frac{a^2}{(b+c)^2a}=b^2}$

$\frac{a^4}{(b+c)^2a^2}=b^4 \Rightarrow b=\sqrt{\frac{a}{b+c}}$ $\quad c=\sqrt{\frac{b}{a+c}}$ $\quad a=\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ үед тэнцэнэ.

EK=KC гэж батална. Ингэж батлахын тулд MK-г $\triangle BCE$-н дундаж шугам буюу $BE \parallel MK$ гэж баталъя.



① $\measuredangle MAC = \alpha$ ~~гэвэл~~ гэе.

② AMCK - 1 тойрог байна.
$\measuredangle MAC = \alpha$
ижил MC нумд ~~[illegible]~~ тулсан гэдгээс
$\underline{\measuredangle MKC = \alpha}$ болно.

③ ADCE - 1 тойрог байна.
$\measuredangle MAC = \measuredangle DAC = \alpha$
Ижил DC нумд тулсан
гэдгээс $\underline{\measuredangle DEC = \alpha}$ болно.

④ ② ба ③-аас хоорон өнцгүүд тэнцүү учир $BE \parallel MK$
~~гэдэг нь тодорхой болно~~ батлагдана.

Фалесийн теоремоор
$\begin{cases} BM = MC \\ BE \parallel MK \end{cases} \Rightarrow CK = KE$ болж

бодлого маань
батлагдав

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал: 1 | Шифр: 0 2 7 5 | Оноо: 0 оноо. | Хуудас/Нийт: 3 3

~~Цэнэг орох~~ Цэнгэрт бүх цифрүүдийг $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ гэе. ~~Тэдгээрийн~~ цэнэг орж буй цифрүүдийн тоог $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{10}$ гэе.

$x_1, x_2, \dots, x_{10} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Тоо 9-т хуваагдахын тулд цифрүүдийн ~~нийлбэрийн~~ нийлбэр нь 9-т хуваагдах ёстой. Ямар нэг A үү биш гэж бодвол

$A = x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_{10} \cdot n_{10}$ болно. $A = 0 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + \dots + 9 \cdot n_{10}$

бн. $0 \le n_1, n_2, n_3, \dots, n_{10}$ бн. A цэнэг давтагдаж буй ~~удаа~~ тооны тоо n_i-~~ээ~~ ~~тооноос~~ хамааран цифрүүдийн сонголт байна. Энд 0-н цифр хэдэн удаа орсон нийлбэрийн утганд нөлөөлөхгүй.

a). $n_i \equiv 0 (3)$ бол.