Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
Д	Б	2	0	3	7	1	3

$x=y=1$, $z=-2$ гэвэл

$$\left(\frac{1^2+1^2+(-2)^2}{3}\right)^3 \geqslant K\cdot 1^2\cdot 1^2\cdot(-2)^2 \Longrightarrow 8\geqslant 4K \Longrightarrow 2\geqslant K$$ байна.

$x+y+z=0$ байх аливаа x,y,z бодит тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 \geqslant 2\cdot x^2y^2z^2$$ гэж баталъя.

Хэрэв $xyz=0$ бол батлах зүйл илт. Иймд $xyz\neq 0$ байг. $x+y+z=0 \Longrightarrow x,y,z$-ээс аль нэг 2 нь ижил тэмдэгтэй. Иймд $\underline{x\cdot y>0}$ гэж үзэж чадна. (тэгш хэмтэй,

Эндээс батлах зүйлдээ $z=-(x+y)$ гэж орлуулбал

$$\left(\frac{2(x^2+y^2+xy)}{3}\right)^3 \geqslant 2x^2y^2(x+y)^2$$ болно. $\Longleftrightarrow 4(x^2+y^2+xy)^3\geqslant 27x^2y^2$

Δ.

$$x^2+y^2+xy \overset{\text{Коши}}{\geqslant} 3xy>0 \Longrightarrow (x^2+y^2+xy)^2\geqslant 9x^2y^2 \quad (1)$$

$$4(x^2+y^2+xy)\overset{\text{Коши}}{\geqslant} 3(x+y)^2 \quad (2)$$

(1) ба (2)-оос үржүүлбэл $4(x^2+y^2+xy)^3\geqslant 27x^2y^2(x+y)^2$ байж батлагдав. Иймд K-ийн хамгийн их утга 2 байна.

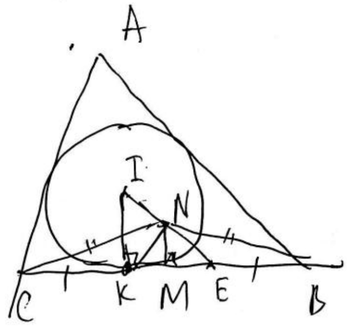
Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A2

Ангилал	Шифр				Оноо
Д	Б	2	0	3	1

Хуудас/Нийт	
2	3

$\triangle ABC$-д багтсан тойрог BC талыг K цэгт шүргэдэг ба



BC талын дундажыг M гэе.

$BE = CK = p-c$ байх ба N нь IE-ийн дундаж тул $NM \perp BC$ байна. Иймд $NC = NB$.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал		Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт	
D	Б	2	0	3	3	3	3

Хэрэв $p_n \mid p_k^{1009}-1$ ба $p_n \nmid p_k-1$ байх $n, k \in \mathbb{N}$ олдоно

гэж батлавал
$$\left.\begin{aligned} p_k^{1009}-1 &\equiv 0 \ (p_n) \\ p_k^{p_n-1}-1 &\equiv 0 \ (p_n) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$p_k^{(p_n-1,\ 1009)} \equiv 1 \ (p_n)$$ болох ба $p_k \not\equiv 1 \ (p_n)$ тул

$1009 \mid p_n-1$ болно. Эндээс $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}\left(p_n^{1009}-1\right) \vdots 1009$

болж батлах зүйл гарна. $\left(p_n^{1009}-1 \vdots 2018 \text{ байна}\right)$

Иймд $\exists n, k \in \mathbb{N}: \ p_n \mid p_k^{1009}-1, \ p_n \nmid p_k-1$ гэж батлая.

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}\cdot\left(p_{n-1}^{1009}-1\right) = a_{n-2}\frac{\left(p_{n-1}^{1009}-1\right)\left(p_{n-2}^{1009}-1\right)}{p_{n-1}\cdot p_{n-2}} = \dots = \frac{\left(p_{n-1}^{1009}-1\right)\left(p_{n-2}^{1009}-1\right)\cdots\left(p_1^{1009}-1\right)}{p_{n-1}\cdot p_{n-2}\cdots p_1}a_1$$

байх нь илэрхий. $\forall n \geq 1: \quad p_n \mid \dfrac{\left(p_{n-1}^{1009}-1\right)\cdots\left(p_1^{1009}-1\right)}{p_{n-1}\cdots p_1}a_1$ болно.

Хэрэв $\forall n \geq 1: \ \left(p_n, \left(p_{n-1}^{1009}-1\right)\cdots\left(p_1^{1009}-1\right)\right) = 1$ гэвэл $\forall n \geq 2$

$$\left(p_{n-1}\cdots p_1, \ \left(p_{n-1}^{1009}-1\right)\cdots\left(p_1^{1009}-1\right)\right) = 1 \Longrightarrow$$

$p_{n-1}\cdots p_1 \mid a_1$ болохоор хэрэг a_1 нь тогтмол олон анхны тоон үржвэрт хуваагдах болж зөрчилд хүрнэ.

Иймд $p_n \mid (p_{n-1}^{1009}-1)\cdots(p_1^{1009}-1)$ байх $n \in \mathbb{N}$ олдоно.

$\Rightarrow p_n \mid (p_k^{1009}-1)$ байх $\exists n,k$ $(k<n)$ олдоно. $p_n \nmid p_k-1$ бол

олдудал шийдэгдэнэ. $p_n \mid p_k - 1$ юм. $\Rightarrow$ $1009 \nmid p_n - 1$ байна.

$$p_n \;\Big|\; \left(\frac{p_{n-1}^{1009}-1}{p_{n-1}-1}\right)\cdot\left(\frac{p_{n-2}^{1009}-1}{p_{n-2}-1}\right)\cdots\left(\frac{p_1^{1009}-1}{p_1-1}\right)\cdot\frac{(p_{n-1}-1)\cdots(p_1-1)}{p_{n-1}\cdots p_1}\cdot a_1$$

~~$\forall n \geq 2: \; p_n \mid (p_{n-1}-1)(p_{n-2}-1)\cdots(p_1-1)\,a_1$ юм.~~

$$p_{n+1} \nmid (p_n-1)(p_{n-1}-1)\cdots(p_1-1)\,a_1$$

$\forall n \geq 1$ $\;1009 \nmid p_n$ юм. (Хэрэв $\exists n \in \mathbb{N}: 1009 \mid p_n$ бол $1009 \mid a_n$ $\Rightarrow 2018 \mid a_n$)

$$a_{n+1} \equiv \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009}-1) \equiv \frac{a_n}{p_n}(p_n-1) \pmod{1009}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &\equiv a_n - \frac{a_n}{p_n} \pmod{1009} \\ a_n &\equiv a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} \pmod{1009} \\ &\vdots \\ a_2 &\equiv a_1 - \frac{a_1}{p_1} \pmod{1009} \end{aligned}\right\} \quad a_{n+1} \equiv a_1 - \left(\frac{a_n}{p_n} + \dots + \frac{a_1}{p_1}\right) \pmod{1009}$$

$a_{i+1} \equiv a_{j+1} \pmod{1009} \Rightarrow$

$\left(\frac{p_{i+1}-1}{p_i}\right)\cdots\left(\frac{p_j-1}{p_j}\right) \equiv 1 \pmod{1009}$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &\equiv a_n \frac{(p_n-1)}{p_n} \pmod{1009} \\ &\vdots \\ a_2 &\equiv a_1 \frac{(p_1-1)}{p_1} \pmod{1009} \end{aligned}\right\} \quad a_{n+1} \equiv a_1 \frac{p_1-1}{p_1}\cdots\frac{p_n-1}{p_n} \pmod{1009}$$

$$a_1 \frac{(p_1-1)\cdots(p_n-1)}{p_1\cdots p_n} \equiv a_1 - \left(\frac{a_n}{p_n} + \dots + \frac{a_1}{p_1}\right)$$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр				Оноо
2	6	4	1	6	7

Хуудас/Нийт: 1 / 5

$f(x)$, $g(x)$ -олон гишүүнтүүдийн хоёулан нь хуваагдах рационал коэффициенттэй хамгийн их зэргийн олон гишүүнт буюу ХИЕХ-ийг нь $d(x)$ гэе. Ө.х. $\mathbb{Q}[x]$ дээр

$d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$ байг. $\Longrightarrow$ $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$; $K(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$M_1 f(x) = K(x) \cdot d(x)$, $M_2 g(x) = K(x) \cdot d(x)$ байна.

$d(x)$ -ийн коэффициентүүдийн ХБЕХ-ийг m гэвэл $m d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ болно. $\Longrightarrow$ $m M_1 f(x) = K(x) \cdot md(x)$, $m M_2 g(x) = K(x)\, md(x)$

$d'(x) = m d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ гэе.

Нэрэв $d'(x)$ нь тогтмолоос ялгаатай байг.

Тэгвэл ямар нэг $d'(n)$ -ийг хуваадаг анхны тоо төгсгөлгүй олон байна. (Шурын теорем) [$d'(0) = 0$ бол илт. $\forall p \in \mathbb{P} : p \mid d'(p)$
$d'(0) = 1$ бол $d'(n!)$ -г авч үзнэ.
$d'(0) \neq 0$ $d''(x) = \dfrac{d'(d'(0)x)}{d'(0)} \in \mathbb{Z}$
авч үзнэ].

$\Longrightarrow$ $p > \max(m, M_1, M_2, 2018)$ ба $p \mid d'(n)$ байг. $\Longrightarrow$

$a_n = (f(n), g(n)) \,\vdots\, p$ болж зөрчнө. Иймд $d'(x)$ нь тогтмол байна.

Ө.х. $f(x)$, $g(x)$ нь харилцан анхны олон гишүүнтүүд. $\Rightarrow$

$$F(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot G(x) = A, \quad F(x),\, G(x) \in \mathbb{Z}[x] \;\&\; A \in \mathbb{N}$$

байхаар авдаг. Одоо A-г үе болно гэж баталъя. $\forall n \geq 1$

$$a_n = (f(n), g(n)) \Rightarrow a_n \mid A \text{ байна.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(n+A) \equiv f(n) \ (A) \\ g(n+A) \equiv g(n) \ (A) \end{array}\right. \Rightarrow a_n \mid a_{n+A} \text{ болно.}$$

$$a_{n+A} \mid A \text{ тул } \left.\begin{array}{l} 0 \equiv f(n+A) \equiv f(n) \ (a_{n+A}) \\ 0 \equiv g(n+A) \equiv g(n) \ (a_{n+A}) \end{array}\right\} a_{n+A} \mid (f(n), g(n))$$

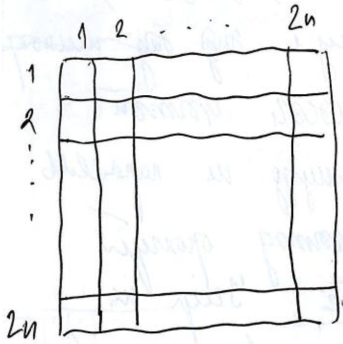
$$\Rightarrow a_{n+A} \mid a_n \Rightarrow a_n = a_{n+A} \text{ болж батлагдав.}$$

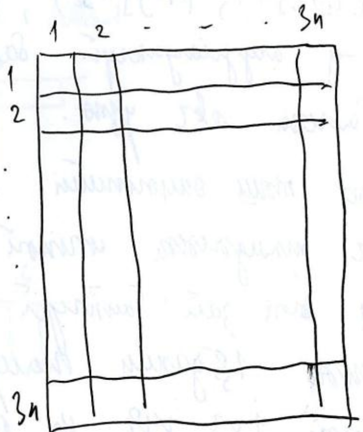
Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б2

Ангилал	Шифр				Оноо
Д	Б	4	1	6	7

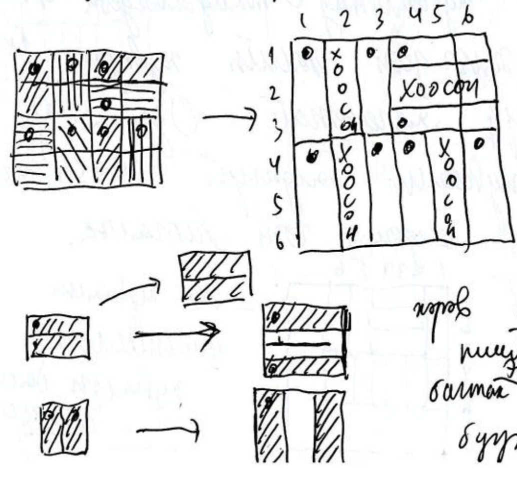
Хуудас/Нийт	
2	5





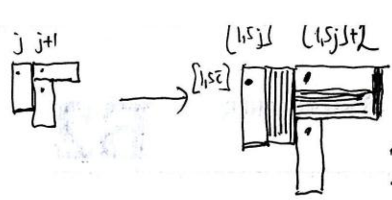
Зургийг үргэлжлүүлэх
Квадратуудыг дүүргэлэ

$2n \times 2n$-ийг 1×2-оор хучсан хуваалт авч үзье. Хуваалтын 1×2 тэгш өнцөгт бүрийн зүүн дээд булангийн нүднүүдийг тэмдэглэе. (i, j)-дугаартай тэмдэглэсэн нүд бүрт $3n \times 3n$ хүснэгтийн $([1{,}5i], [1{,}5j])$-дугаартай нүдийг харгалзуулаад хэрэв тэмдэглэсэн нүдтэй 1×2 хэвтээ босоо бол ~~[illegible]~~ $3n \times 3n$ дээрх нүдтэй 1×2 хэсгийг босоо бол 1×3 байгуулъя. (Зургийг үргэлжлүүлэв, тэмдэглэсэн нүдтэй босоо 1×3



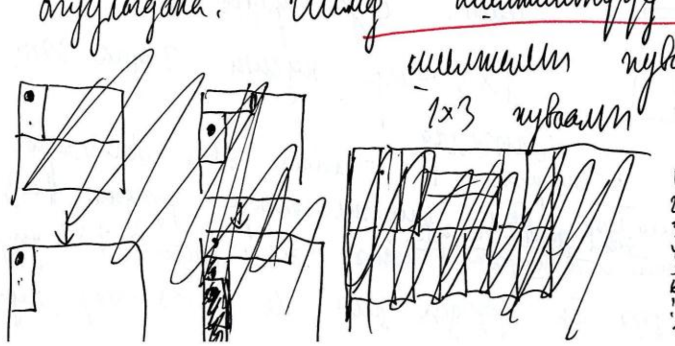
Ингээд ингэж байгуулахад нь
1×3-ууд давхцахгүй байх нь
илт. Одоо үлдэх хэсгийг
1×3-аар хучиж болох гэж
баталъя.

хэрэв 2 ширхэг 1×2 хэвтээ эсвэл босоогоороо
шүргэлцсэн бол шүргэлцэлтээр дундаа 1×3
багтах 2 ширхэг хэвтээ эсвэл босоо 1×3 үүдэд
бүх би дундах зайг нь 1×3-аар хучна,



Хэрэв (i,j), $(i,j+1)$ тэмдэглэсэн нүднүүд ба (i,j) – босоо, $(i,j+1)$ – хэвтээ байг. (j – сондгой)
Тэгвэл $3n\times 3n$ дээр $([1{,}5i],[1{,}5j])$, $([1{,}5i],[1{,}5j]+1)$ тэмдэглэсэн нүднүүд байгаад ~~$([1{,}5i],[1{,}5j]+1)$, $([1{,}5i],[1{,}5j]+2)$~~ $([1{,}5i],[1{,}5j]+1)$, $([1{,}5i]+1,[1{,}5j]+1)$, $([1{,}5i]+2,[1{,}5j]+1)$ – хоосон байх бөгөөд аль ч 1×3-д агуулагдахгүй байх тул энд бид ~~[illegible]~~ 3 нүдийг 1×3 болгож авч үзнэ. Тэмдэглэсэн нүдтэй 1×3 хэвтээ эсвэл босоо тэгш өнцөгтийн яг хажууд нь параллель 1×3 хүснэгт аль ч тэмдэглэсэн нүдтэй хүснэгтэд орохгүй байхаар байна эсвэл огт зай байхгүй байна. Учир нь бид $2n\times 2n$ хүснэгтээ 1,5 дахин томруулж авч үзэж байгаа тул тэмдэглэсэн нүдтэй 1×3 үүд үе [illegible] завсар байвал тэр завсарт нь яг 1×3 багтана.

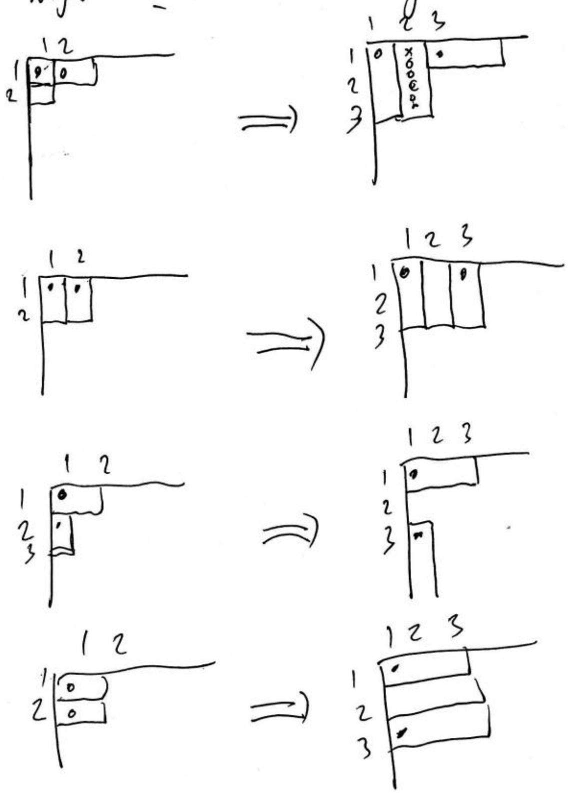
Одоо аль ч ялгаатай $2n\times 2n$-ийн хуваалтын хувьд манай шилжүүлсэн буулгалтын дүрүүд ялгаатай гэж баталъя. $2n\times 2n$-ийн хуваалтууд ялгаатай тул ямар нэг (i,j)-ийн хувьд эхний хуваалтад (i,j) нь тэмдэглэгдсэн нүд байх ба 2 дахь хуваалтад (i,j) нь тэмдэглэгдсэн нүд биш байна. Эхний хуваалтын шилжилт хуваалтад $([1{,}5i],[1{,}5j])$ нь тэмдэглэгдсэн нүд байх ба 2 дахь хуваалтын шилжилт хуваалтад $([1{,}5i],[1{,}5j])$ нь тэмдэглэгдсэн нүд биш бөгөөд ор ямар нэг тэмдэглэгдсэн нүдтэй хувьдаа 1×3-д агуулагдана. Иймд шилжилтүүд ялгаатай. Одоо ямар ч шилжилт хуваалт болдоггүй $3n\times 3n$-ийн 1×3 хуваалт олдохыг батлъя.



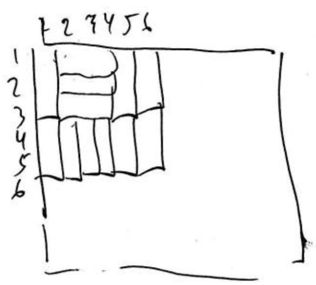
– энэ хуваалт шилжилт хуваалт болохгүй урагш

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
Д	Б	4	1	6		3	5

Хэрэв шилжилт болдог гэвэл



Бараг бас аль 2 тохиолдолд



-эхэлж хуваалт гаргуулъя. Иймд $2n \times 2n$-ийг 1×2 хуваах хуваалтын тоо нь $3n \times 3n$-ийг 1×3 хуваах хуваалтын тооноос бага байна.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал Шифр: D B 4 1 6 | Оноо: 5 | Хуудас/Нийт: 4 5

Эсрэгээр нь $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1 \vdots (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1=A$ гэе.

$$(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1-\left((p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1\right)=(p+q)^{p-q}(p-q)^{p-q}\left((p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}\right)$$

болох ба $(A,(p+q))=(A,(p-q))=1$ тул

$(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q} \vdots A$ болно. $\Rightarrow$

$(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q} \geq (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1 \Rightarrow$

$(p+q)^{2q} > (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} \Rightarrow (p+q)^{3q-p} > (p-q)^{p+q} \Rightarrow$

$3q>p$ байна.

Хэрэв $p|A$ бол $p|(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1$

$(p+q)^{p-q}\cdot(p-q)^{p+q}-1 \equiv q^{p-q}\cdot q^{p+q}-1 = q^{2p}-1 \equiv q^2-1 \equiv 0\ (p) \Rightarrow$

$p|q\pm 1$ болох $p>q$ гэдэгт зөрчилдөнө.

Хэрэв $q|A$ бол $(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1 \equiv p^{2p}-1 \equiv 0\ (q)$ ба

$p^{q-1}\equiv 1\ (q) \Rightarrow p^{(2p,q-1)}\equiv 1\ (q)$ болно.

$p>q$ тул $(p,q-1)=1$. Эндээс $p^2\equiv 1\ (q) \Rightarrow$

$q|p-1$ эсвэл $q|p+1$ байх ба. $3q>p$ тул $p=2q\pm 1$ эсвэл $p=3q-1$ болох боломжтой.

$p=2q+1$ бол $(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}=(3q+1)^{2q}-(q+1)^{2q} \geq A=(3q+1)^{q+1}(q+1)^{3q+1}-1$

$\Rightarrow (3q+1)^{q-1} > (q+1)^{3q+1} \Rightarrow \left(\frac{3q+1}{q+1}\right)^{q-1} > (q+1)^{2q+2}$ гэвэл $3^{q-1} > \left(\frac{3q+1}{q+1}\right)^{q-1} > (q+1)^{2q+2}$ болох зө

$p=2q-1$ бол $(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}=(3q-1)^{q}-(q-1)^{2q}\geqslant A=(3q-1)^{q+1}(q-1)^{3q-1}-1\Rightarrow$

$$(3q-1)^{q+1}\geqslant(q-1)^{3q-1}$$

$$\left(\frac{3q-1}{q-1}\right)^{q+1}\geqslant(q-1)^{2q-2}. \Rightarrow \quad 4^{q+1}>\left(\frac{3q-1}{q-1}\right)^{q+1}>(q-1)^{2q-2}\geqslant 4^{2q-2}$$

бали зөрчил.

$p=3q-1$ бол $(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}=(4q-1)^{2q}-(2q-1)^{2q}\geqslant(4q-1)^{2q-1}(2q-1)^{4q-1}-1$

$4q-1\geqslant(2q-1)^{4q-1}$ бали зөрчил.

Иймд $qp\nmid A$ байна.

$t\mid A$ ба $t\in\mathbb{P}$ байг. $t\mid(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}$

$(t,p-q)=1$ тул $(p-q)\cdot a\equiv1\ (t)$ байх $\exists a$.

$$\left.\begin{aligned}&(p+q)^{2q}\equiv(p-q)^{2q}(t)\Rightarrow\ ((p+q)a)^{2q}\equiv1\ (t)\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ ((p+q)a)^{t-1}\equiv1\ (t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$((p+q)a)^{(2q,t-1)}\equiv1\ (t)$ байна. Хэрэв $(q,t-1)=1$ хэвэл

$((p+q)a)^{2}\equiv1\ (t)\Rightarrow (p+q)^{2}\equiv(p-q)^{2}\ (t)\Rightarrow$

$4pq\equiv0\ (t)$ болно $t\mid pq\Rightarrow pq\nmid A$ гэдэгт зөрчино.
(A-сондгой тул t-сондгой)

Иймд $q\mid t-1$ байна. $\Rightarrow A=t_1^{\alpha_1}\dots t_k^{\alpha_k}\equiv1\ (q)$

$\Rightarrow (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1\equiv p^{2p}-1\equiv1\ (q)$ болно,

$t\mid A$ ба $t\in\mathbb{P}$ байг. $\begin{aligned}&(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}\equiv1\ (t)\\&(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}\equiv1\ (t)\end{aligned}\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&(p+q)^{2p}\cdot(p-q)^{2p}\equiv1\ (t)\\&((p+q)(p-q))^{t-1}\equiv1\ (t)\end{aligned}\right\}((p+q)(p-q))^{(2p,t-1)}\equiv1\ (t)\ \text{Иймээс}\Rightarrow$$

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
Д	Б	4	1	6		5	5

Хэрэв $(p, t-1) = 1$ гэвэл

$((p+q)(p-q))^2 \equiv 1 \ (t)$ болно. $\Rightarrow$ $t \mid p^2-q^2-1$ эсвэл

$t \mid p^2-q^2+1$ байна. Нөгөө талаас $t \equiv 1 \ (q)$ байна.

$(p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} \geq (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1 \Rightarrow$ $p>q$

$(p+q)^{2q} \geq (p-q)^{2q} + (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1 \geq (p-q)^{2q}(p+q)^{p-q} \Rightarrow$

$(p+q)^{3q-p} \geq (p-q)^{2q}$ $\quad p = q+x$ гэе.

$(2q+x)^{2q-x} \geq x^{2q}$ $\quad$ Хэрэв $x > q$ гэвэл

$3^{2q} > \left(\frac{2q+x}{x}\right)^{2q} \geq (2q+x)^{x} > (3q)^{q}$ болж зөрчинө.

Иймд $x \leq q$ буюу $p < 2q$ байна.

$p^2-q^2+1 = (p+x)^2 - q^2 + 1 = x^2+2qx+1 \leq q^2+2qx+1 \leq 3q^2+1$

$\Rightarrow$ $(q+1)^3 > 3q^2+1$ тул $t \mid p^2-q^2\pm1$ байх t

хамгийн 2 байна. Хэрэв ийм байх t олдохгүй

бол $t-1 \equiv 0 \ (p) \Rightarrow t \equiv 1 \ (p) \Rightarrow A \equiv 1 \ (p)$

болох ба $A = (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1 \equiv q^{2p} - 1 \equiv q^{2} - 1\ (p)$

$\Rightarrow$ $p \mid q \pm 1$ болно ба $p > q$ гэдэгт зөрчил

Бодлого бодогдоно.