Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал	Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
Д	5 220	7	1 / 3

ДБ.А1 [illegible]

[illegible] x, y, z [illegible] 2 [illegible] a, b [illegible] $-(a+b)$ [illegible]

$$\left(\frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{3}\right)^3 \geq k\cdot a^2b^2(a+b)^2 \Leftrightarrow$$

$$8\left(\frac{a^2+b^2+ab}{3}\right)^3 \geq k\cdot a^2b^2(a+b)^2$$ [illegible]

k [illegible] $a=0$ [illegible]

[illegible] $\frac{8a^6}{27} \geq 0$ [illegible] k [illegible]

[illegible] $a \neq 0$ [illegible] $\frac{b}{a} = x$ [illegible] $x > 0$ $\vdots\, a^6$-д [illegible]

$$\frac{8}{27}\cdot(1+x+x^2)^3 \geq k\cdot x^2(1+x)^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{(1+x+x^2)^3}{x^2(1+x)^2} \geq \frac{27k}{8}$$ [illegible]

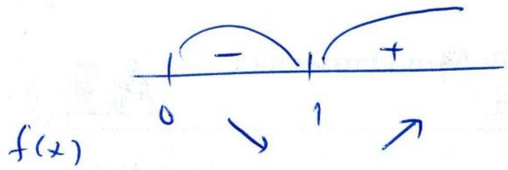
$$f'(x) = \frac{3\cdot(1+x+x^2)^2\cdot(2x+1)x^2(1+x)^2 - (1+x+x^2)^3\cdot 2(x+1)x\cdot(2x+1)}{x^4(1+x)^4} =$$

$$= \underbrace{\frac{(1+x+x^2)^2(2x+1)(x+1)(x)}{x^4(1+x)^4}}_{A}\left[3(x+1)x - 2(1+x+x^2)\right] =$$

$x>0$ [illegible] $A>0$

$$= A\cdot\left[x^2+x-2\right] = 0 \Rightarrow$$ $x=1$ [illegible]

$A \cdot (x^2+x-2)$:



$f(x)$ нь $x=1$ цэг

хб утгатай болно.

$$f(1) = \frac{(1+1+1^2)^3}{1^2\cdot(1+1)^2} = \frac{27}{4} \geqslant \frac{27k}{8} \Rightarrow k \geqslant 2$$

болно.

Иймд $\boxed{k=2}$

$x=1$ буюу a, a, $-2a$ цэг тэнцүү болно.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
А	5	2	2	0	1	3	3

А5.А3. $\forall p$ хувьд Фермагийн теоремоор (1009 анхны тоо)

$$p^{1009} \equiv p\ (1009) \Rightarrow p^{1009} - 1 \equiv p - 1\ (1009) \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \equiv \frac{a_n}{p} \cdot (p^{1009} - 1) \equiv \frac{a_n \cdot (p-1)}{p} \ (\text{mod } 1009)$$

Хэрэв ямар нэгэн n тооны хувьд

$a_{n+1} \equiv 0 (1009)$ бол

$\frac{a_n (p-1)}{p} \equiv 0\ (1009) \Rightarrow$ p сондгой бол $a_n \equiv 0 (2018)$

p тэгш бол $\frac{a_n}{2} \equiv 0 (1009) \Rightarrow a_n \equiv 0 (2018)$

болно. Иймд

$\exists n \in \mathbb{N}.\ a_n \equiv 0 (1009)$ нь байлгахад хангалттай.

Хэрэв ямар нэгэн $p = 1009$ бол болох нь ойлгомжтой. Иймд $\{p_n\}$ дараалалд 1009 орохгүй гэе. $(p_n, 1009) = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\cancel{p_n a_{n+1} \equiv a_n(p_n - 1) \equiv a_{n-1}}$

$$a_{n+1} \equiv a_n \cdot \frac{p_n - 1}{p_n} \equiv a_{n-1} \cdot \frac{p_{n-1} - 1}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_n - 1}{p_n} \equiv \cdots$$

$$\equiv a_1 \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n - 1}{p_n} \ (\text{mod } 1009)$$

Λήμμα $\exists\ k+1$

$p_1, \dots, p_k, \ldots$

p_{k+1}

~~$p_{k+1} \mid (p_1^{1009}-1, p_2, \dots, p_k^{1009}-1)$~~

$p_{k+1} \mid p_1^{1009}-1$, ήδη $p_2^{1009}-1, \dots, p_k^{1009}-1$

ότι ισχύει 2 διότι k άτοπο.

~~Ισχυρό~~ Βασίζεται στο ισχυρό.

$q \mid p^{1009}-1$ ισχύει του

$q \mid p-1$ άτοπο ήδη $\boxed{q \equiv 1 \ (1009)}$

άτοπο.

$\downarrow$

άρα και $q-1 \equiv 0 (1009)$

άρα $\exists\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \equiv 0 \ (1009)$

άτοπο. ▲

Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал	Шифр			Оноо	Хуудас/Нийт
Д	Б	4	3 3	7	1/3

ДБ.Б1 $\forall n \in \mathbb{N}$ ~~дурын~~ дурын хувьд

$a_n = a_{n+sa_n}$ $s \in \mathbb{N}$ гэж баталъя.

Б $(f(n), g(n)) = a_n$, $\forall s \in \mathbb{N}$: Безугийн теоремоор.

$f(n+sa_n) \equiv f(n)\ (sa_n)$
$g(n+s\{a_n\}) \equiv g(n)\ (s\{a_n)$ тул.

$a_{n+sa_n} = (f(n+sa_n), g(n+s\{a_n))) \geq a_n$ болно.

$\{a_n\}$ дараалал өсөхгүй байх дараалал тул

Хангалттай их $\forall s \in \mathbb{N}$ хувьд
~~f(...)~~ $\{a_{n+sa_n}\}$ дараалал буурахгүй

$\Rightarrow$ $a_{n+sa_n} = a_{n+(s+1)a_n} = \dots = k \cdot a_n$ байх

k тоо олдоно. $k > 1$ гэе. Эндээс

$f(n + k \cdot s a_n) \equiv f(n)\ (\mod k a_n)$ тул
$g(n + k s a_n) \equiv f(n)\ (\mod k a_n)$

$f(n+ksa_n) = f(n) + A \cdot k a_n$
$g(n+ksa_n) = g(n) + B k a_n$ $\Rightarrow$

$k a_n = a_{n+ksa_n} = (A k a_n + f(n), B k a_n + g(n)) =$
$= (g(n), f(n)) = a_n$ ≠ болж зөрчилд орно.

Иймд $\{a_{n+k \cdot a_n}\}$ дараалал тогтмол a_n тэнцүү дараалал болно. $(k = 0, 1, 2, \dots$

Όπου $k = [1, 2, \ldots, 2018]$ είναι

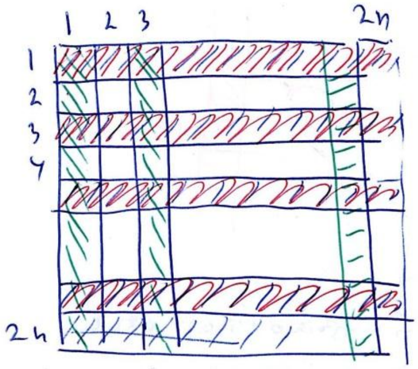
$\forall a_n$ με $a_n | k$ τότε

$a_{n+k} = a_n$ οπότε είναι η

περιοδική ακολουθία. Όπερ έδει δείξαι. ▲

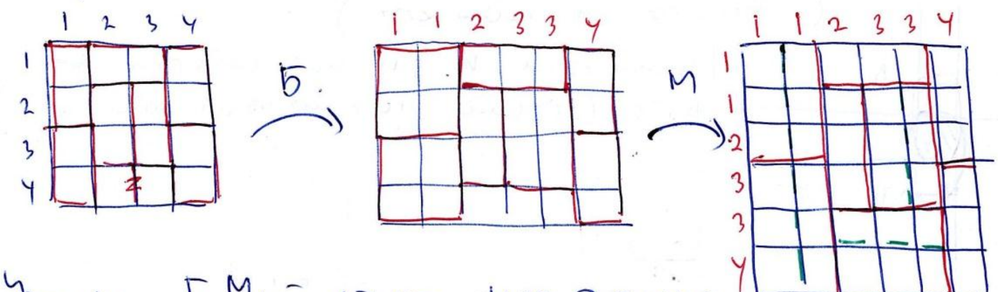
Ангилал	Шифр				Оноо	Хуудас/Нийт	
Д	Б	4	3	3	6	2	3

~~2)~~ ДБ.Б2. $2n \times 2n$ хүснэгтийн мөр ба баганыг дээрээс доош, зүүнээс баруун тийш $1, 2, \dots, 2n$ хүртэл дугаарлая.



Б - ээр $1, 3, \dots, 2n-1$ дугаартай n ширхэг баганыг дахин хуулах үйлдлийг, ~~тэд тэмдэглэе~~. М - ээр $1, 3, \dots, 2n-1$ дугаартай мөрийг дахин хуулах үйлдлийг тус тус тэмдэглэе.

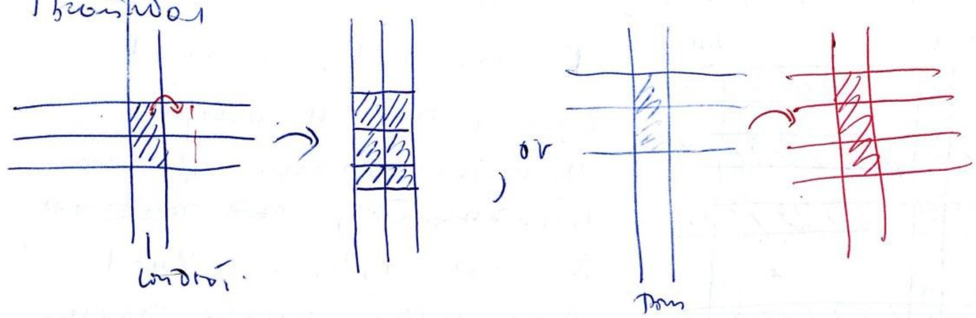
Б ба М үйлдлээр $2n \times 2n$-ийн ямар нэг $\begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 1\times 2 \end{pmatrix}$ ээр хуваасан хуваалт нь $3n \times 3n$-ийн $\begin{pmatrix} 3\times 1 \\ 1\times 3 \end{pmatrix}$-ээр хуваасан хуваалтанд шилжинэ!! Жишээлбэл



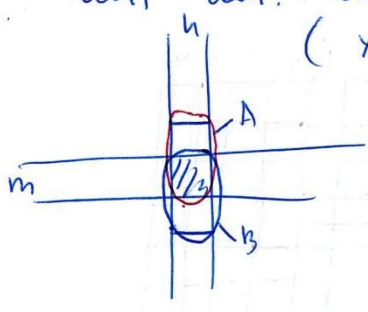
Үүнд нь Б, М үйлдлүүд нь домино ээр 2 удаад үйлдэж хийгдэжгүй. Ө.х домино нь 1×3 эсвэл 3×1, 2×3, 3×2 хэмжээтэй дүрсүүдээд шилжих юм. Энэ нь шилжсэн $3n \times 3n$ дүрс нь $\begin{pmatrix} 3\times 1 \\ 1\times 3 \end{pmatrix}$ хуваагдсан ба шилжихгүй.

Одоо Б ба М үйлдлээр ялгаатай хувилбар ялгаатай хувилбарт очно гэж харуулбал маш тодорхой болно. 2×1 домино өөрийн байрлалаас хамаарч 3×1 эсвэл 3×2 хэмжээтэй ~~…~~ дүрсэд шилжинэ. 1×2 нь мөн адил 1×3, 2×3-д шилжинэ.

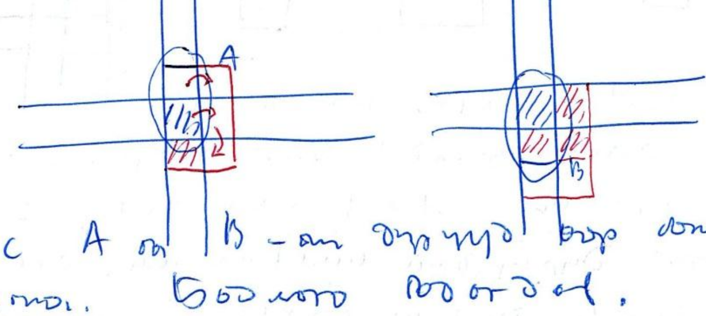
Тухайлбал



Одоо. Өмнөх m×n ялгаатай хувилбартай байг. Уг хувилбар нь (m, n) ~~нүд~~ нүдний хүрээ хүчинт нь өөр байг. Хоёулаа бол, өөрөөр хэлбэл байвал дүрсүүд нь ялгаатай нь дээр дурдсантай ижил юм. Иймд. Зураг ~~…~~ хэлбэрээр хувааж болно.
(Хоёулаа нь адилхан)



Тухайлбал m, n нь ижил ~~…~~ байг (огноо тохиолдол адилхан)



Зургаас A ба B-гийн дүрсүүд өөр болох нь харагдана. Баталгаа батлагдав.

Ангилал Шифр: Д Б 4 3 3 Оноо: 1 Хуудас/Нийт: 3 3

ДБ.Б3

$$A = (p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$$
$$B = (p+q)^{p-q}(p+q)^{p+q} - 1$$

$A \vdots B$ ви

$$A - B = (p+q)^{p-q}(p-q)^{p-q}\left((p+q)^{2q} - (p-q)^{2q}\right) \vdots B$$

$$\left(B, (p+q)^{p-q}(p-q)^{p-q}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$B \mid (p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} = C \text{ болно.}$$

$$\| \quad 4pq\left((p+q)^{2(q-1)} + (p+q)^{2(q-2)}\cdot(p-q)^2 + \dots + (p-q)^{2(q-1)}\right)$$

$M \mid B \quad M \in \mathbb{P}$ гэвэл

$$a \overset{\text{ге.}}{\equiv} (p+q)^{2q} \equiv (p-q)^{2q} \pmod M \Leftarrow M \mid C$$

$$B \Rightarrow (p+q)^{p-q}\cdot(p-q)^{p-q}\cdot\underbrace{(p-q)^{2q}}_{=a} \equiv 1 \pmod M$$

$$a \equiv \left[(p+q)(p-q)\right]^{q-p} \pmod M$$

$$(p+q)^{2q+p-q}\cdot(p-q)^{p-q} \equiv (p-q)^{2q+p-q}\cdot(p+q)^{p-q} \equiv 1 (M)$$