



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A1

Ангилал Шифр

D	2	0	2	
---	---	---	---	--

Оноо

7

Handwritten signature

Хуудас/Нийт

1	4
---	---

авч үзэж буй тэнцэтгэл биеийг x, y, z нь тэгш зөрлөгтэй
тэгш хэргийг орсон тул $x \geq y \geq 0 \geq z$ гэж үзэхэд зөвхөн үргэлжлэн.

(-1-оор үржих хувьсагчид үзвэл хэсрэг нь солих боломжтой)
эсвэл нөхцөлөө $x+y = -z$ болох ба \Rightarrow

$$\left(\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{3}\right)^3 \geq k x^2 y^2 (x+y)^2 \text{ гэж байх ба } y=0 \text{ үед } \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 \geq k \cdot 0 \Rightarrow \forall x \text{ байх ба } y > 0 \text{ үед } \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{(x^2+y^2+xy)^3}{x^2 y^2 (x+y)^2} \geq k.$$

x үрнээр, y хуваарийг $y^2 = a$ гэж үзвэл $\frac{x}{y} = a \geq 1$

гэж оруулбал

$$f(a) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{(a^2+a+1)^3}{a^2(a+1)^2} \geq k.$$

$f(a)$ функцийн ХБҮ-г уламжлал авч авч, $a^2(a+1)^2 = (a^2+a)^2$.

$$f'(a) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3(a^2+a+1)^2 \cdot (2a+1) \cdot (a^2+a)^2 - (a^2+a+1)^3 \cdot 2(a^2+a) \cdot (2a+1)}{(a^2+a)^4} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{(a^2+a+1)^2 (a^2+a) (2a+1) [3(a^2+a) - 2(a^2+a+1)]}{(a^2+a)^4} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{(a^2+a+1)^2 (2a+1)}{(a^2+a)^3} (a^2+a-2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{(a^2+a+1)^2 (2a+1) (a+2)(a-1)}{(a^2+a)^3}$$

~~$a \geq 1$ байх үед~~ $a \geq 1$ үед $f'(a) \geq 0$ болох нь
харгалдан байна. Иймд өсөх функц байна.

$$\text{ХБҮ } f(a) \geq f(1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3^3}{2^2} = 2.$$

Эсвэл Т/Б биелдэг байх хамгийн их k -г эл үед
тул $k=2$ үед Т/Б биелдэнэ.

Тэнцэх нөхцөл нь $\frac{x}{y} = 1$ байна.

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x=a \\ y=a \\ z=-2a \end{matrix} \right\} \text{ олгогч байна (Тэгш зөрлөгтэй тул)}$$

$$\cos \alpha = \frac{EN}{NQ} = \frac{\sqrt{r^2 + (c-b)^2}}{4NQ} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c-b}{r}\right)^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (c-b)^2}} \Rightarrow$$

$$NQ = \frac{r^2 + (c-b)^2}{4r} \quad NQ + r_a = R_1 \text{ рам батална. } (**)$$

$$\frac{r^2 + (c-b)^2}{4r} + \frac{s}{p-a} = \frac{a^2 + r^2}{4r} \Rightarrow$$

$$\frac{s}{p-a} = \frac{a^2 - (c-b)^2}{4r} \Rightarrow \frac{s}{p-a} = \frac{a-c+b}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{s}{p-a} = \frac{(p-c)(p-b)}{r} \quad s = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r} \quad \text{Энгийн талын хуртвар}$$

суваарын p -оор урмбал $s = \frac{s^2}{s}$ баян баталнагатай
 (NK) ~~Энгийн~~ гоош $\triangle BNC$ -г багтаасан тэйрлийн радиустай
 тэйрүү NO_1 хоронийн цэр таны талдаах ба O_1 үеэ
 таны эргэнэ. мөн BC талын уурвалж явааг байсан
 тэйр $\triangle BNC$ -г багтаасан O_1 -г төвтэй 2 тэйр
 M үеэсөө уурвалжын нь харгалзан байна.

$$\text{Үүр нь } r_a + I_a O_1 = R_1$$

$$I_a O_1 = EQ = QN \text{ баян. } (**)$$



МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 54-р ОЛИМПИАД
IV Даваа

A3

Ангилал Шифр

0	5	2	0	2
---	---	---	---	---

Оноо

$1+3=4$ оноо

Хуудас/Нийт

3	4
---	---

$a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1009} - 1)$ гэдэг a_n -ийн анхны хуваагчид дээр
хуваагдах анхны тоонуудыг сонирхой. Үг ажилла тоонууд
 $p_n^{1009} - 1$ -ийн анхны хуваагчдад гарна.

$$\begin{cases} p_n^{1009} - 1 \equiv 0 (q) & q \in P \text{ байх.} \\ p_n^{q-1} - 1 \equiv 0 (q) & \text{(Ферма)} \end{cases} \Rightarrow p_n^{(1009; q-1)} - 1 \equiv 0 (q)$$

1009 анхны

\Rightarrow эсвэл (a) $(1009; q-1) = 1$ буюу $p_n - 1 \equiv 0 (q)$ энэ үед
 q нь p_n -оо бага байна.

эсвэл (б) $(1009; q-1) = 1009$ бол $q = 1009k + 1$ болно.

(*) Хэрэв $a_{m+1} = \frac{a_m}{p_m} (p_m^{1009} - 1)$ алхамд $p_m = 1009k + 1$

байхадар сонирвал $\frac{a_m}{p_m} = b_m$ бүхэл бэ

$$p_m^{1009} - 1 = (1009k + 1)^{1009} - 1 \equiv 0 (1009) \text{ байх нь шорхши}$$

$$\text{нэв } (1009k + 1)^{1009} - 1 \equiv 0 (2) \Rightarrow$$

$$a_{m+1} \equiv 0 (2018) \text{ болно.}$$

үгүй бол - \downarrow ~~аг~~ a_m дараагийн анхны хуваагч

~~аг~~ бага анхны хуваагчаар эсвэл бага анхны
тэрэн хуваагчдаг үрнээрээр сонирхоно. ~~аг~~
Энэ үндсэн тооцолгүй үрнээрээр байгаагүй
Түүн агаар (*) нэхгээл үрнээ.

о.х. агаар нэх ~~аг~~ $= 1009k + 1$ анхны тоонуудын үрнээр
болт $p_m = 1009k + 1$ нэм сонирдог
хүрээ.

Ишгэвч багцагдвал



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

A3

Ангилал Шифр

8	5	2	0	2
---	---	---	---	---

Оноо

--

Хуудас/Нийт

4	4
---	---

a_n -өөс $a_{n+1} - 2$ хэсэг хамрагдах анхны Теселүүд

$a_n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ба

$$a_n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1009} - 1)$$

сүүрхэвч үч анхны тэг $p_n^{1009} - 1$ -ийн анхны

хуваагддаг гэрлэ.

Ферматийн теоремд

$$p_n^{1009} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

$$p_n^{1009} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

$$p_n^{1009} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

1009 анхны тэг тул $(1009; q-1) = 1$ байх ба

$$p_n - 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

$$(1009; q-1) = 1009 \text{ буюу } \Rightarrow$$

$$q = 1009k + 1.$$



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б1

Ангилал Шифр

2	5	4	1	5
---	---	---	---	---

Оноо

7

Хуудас/Нийт

1	3
---	---

$$(f(x), g(x)) = d(x) \text{ нөхцөл.}$$

$$(f(n), g(n)) = (f_1(n)d(n), g_1(n)d(n)) = |d(n)| (f_1(n), g_1(n)) < 2018$$

$$(f_1(n), g_1(n)) \geq 1 \text{ тул } |d(n)| \text{ -ийн утга заамагдсан}$$

байна. Ө.х. $d(x)$ групп; прогрессив заамагдсан байна.

$\Rightarrow d(x)$ - төгсгөл тус тусын группийг хийлт болно.

$$d(x) = d < 2018 \text{ болно.}$$

$$(f(x), g(x)) = d \text{ бол } f(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x) = d \text{ байх } \exists! \alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

$$(f(n), g(n)) = a_n \text{ үзэг } f(n)\alpha(n) + g(n)\beta(n) = d \text{ тул}$$

$$\forall n \exists \alpha, \beta \text{ } a_n | d \text{ байна.}$$

$$\text{өгөө } a_{n+d} = a_n \text{ ном багтаах.}$$

$$a_{n+d} = (f(n+d), g(n+d)).$$

$$a_n | d \mid f(n+d) - f(n) \text{ байна } (a-b \mid f(a) - f(b) \text{ тул}).$$

$$a_n | d \mid g(n+d) - g(n)$$

$$\textcircled{a} \left. \begin{matrix} a_n | f(n) \\ a_n | g(n) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a_n | f(n+d) \\ a_n | g(n+d) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\textcircled{b} a_n | a_{n+d} \text{ байна.}$$

$$\textcircled{b} \left. \begin{matrix} a_{n+d} | f(n+d) \\ a_{n+d} | g(n+d) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a_{n+d} | d | f(n+d) - f(n) \\ a_{n+d} | d | g(n+d) - g(n) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} a_{n+d} | f(n) \\ a_{n+d} | g(n) \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow a_{n+d} | a_n | f(n), g(n) \Rightarrow$$

$$\textcircled{c} a_{n+d} | a_n$$

\textcircled{c} ба \textcircled{b} -оор $a_n = a_{n+d}$ дүрэм
d үетэй бусад нь багтаах.



Монголын Математикийн 54-р Олимпиад

IV Даваа

Б2

Ангилал Шифр

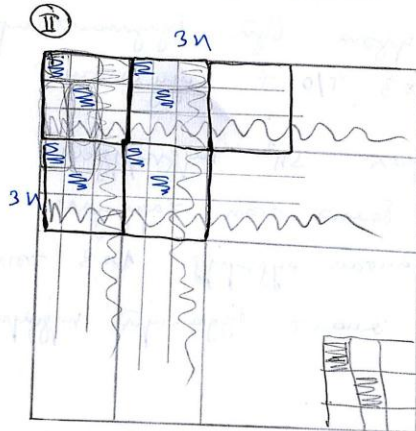
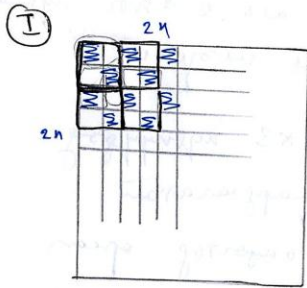
А	Б	Г	Д	Е
---	---	---	---	---

Оноо

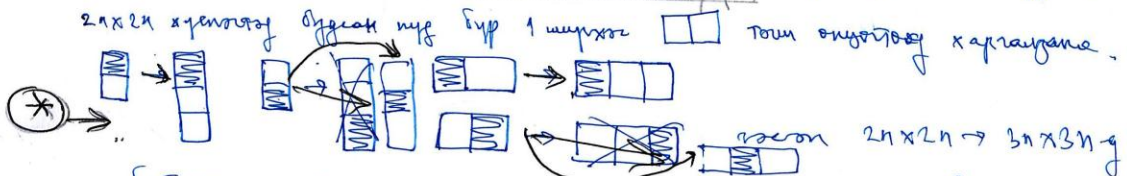
1

Хуудас/Нийт

2	3
---	---

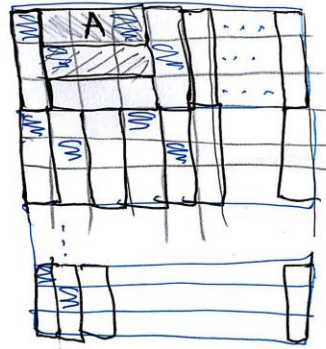


Храндагалаар бүтэн
мөр баганаудын
ашигт гарах $2n \times 2n$
хүснэгтэд гарах бүтэн
мөр бүр өөр өөр $2n \times 2n$
хүснэгтийн бүтэн
мөр бүртэй ХНУ-тай!
харгалдана гэм үгт.



байгуулах шилжихэд дээр дүрлээр үүсгэнэ
Энэ багас гэм гардуйн, Энэснээр $3n \times 3n - 2 \times 3n$
хуваах тас $2n \times 2n - 2 \times 2n$ -г хуваах хуваагч таснаас
багагүй багах болоод (*) ← үндсээр хувирах багасгч
 $3n \times 3n$ -ийн нэг хуваагч асуухт харуулахад хамттай.

ард
батална!!



Эдгээр бүтэн (*) ← хувирагч аар
($3n \times 3n$)-ийн хуваагчаас ($2n \times 2n$)-ийн
хуваагчад шууд шилүүрлэн багасгч
бүтэн багасгч

1 оноо

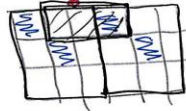
I-Т зургаан  -Т бүтээгч орон  \uparrow/θ -Т



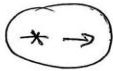
II-Т зургаан  -Т бүтээгч орон
 хамгаалагч

I-Т  хэлбэртэй зургаан 1×2 Т.Ө -Т

II-Т.



том бүлэг 1×3 Т.Ө -Тор бүлэг.



Анх үзэм бүт бүтээгчээр $(2n \times 3n)$ алс 2 үеэ нэгдүүл
 $2n$ 1×3 Т.Ө-Т агуулахгүй нь мэдэгддэг.

Одоо үзэх $3n^2$ нэгдүүлсэн 1×3 нэгдүүлсэг
 үзсэн бэлэн том харуулах шаардлагатай
 Бүт бүтээгч нэгдүүлсэг 1×3 том бүтээгч орон
 болж өөр өөр бүтээгч нэгдүүлсэг үзсэн ??





Монголын Математикийн 54-р Олимпиад
IV Даваа

Б3

Ангилал Шифр

А	Б	Г	Д	Е
---	---	---	---	---

Оноо

0

Хуудас/Нийт

3	3
---	---

$$(p+q, p-q) = (p+q, 2p) = 2. \quad \Rightarrow$$

$$\min(\nu_2(p+q), \nu_2(p-q)) = 1 \quad \text{бэлэн}.$$

$$\left((p+q)^{p+q} (p-q)^{p-q} - 1, (p+q)^{p-q} (p-q)^{p+q} - 1 \right) =$$

$$= \left((p+q)^{p+q} \cdot (p-q)^{p+q} - 1, (p+q)^{p-q} \cdot (p-q)^{p-q} \left((p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} \right) \right) =$$

$$= \left((p+q)^{p+q} \cdot (p-q)^{p+q} - 1, (p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} \right).$$

$$\text{гүрж мн: } \left((p+q)^{p-q} \cdot (p-q)^{p+q} - 1, p+q \right) = 1$$

$$\left((p+q)^{p-q} (p-q)^{p+q} - 1, p-q \right) = 1.$$