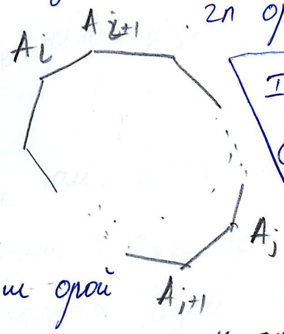
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A1

Шифр: 534 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 4

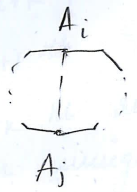
~~A сон~~ 2n өнцөгтийн хувьд бодлогын нөхцлийг хангах ~~Ø~~ диагоналийг татсан байг. 2n оройгоо $A_1, \dots, A_{2n}$ гэе.



I алхамын I баталга урт тул II баталгааг сонирхоно уу. III нүүрэнд.

Тэр диагоналийг $A_i A_j$ гэе

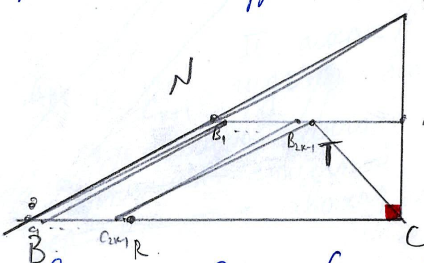
$A_i A_j$ нь тэр олон өнцөгт дотроо оршино. A_i, A_j-н 2 талд x, y ш орой байг.



Үг 2 ш шинэ олон өнцөгтийн оройн тоонууд $x+2, y+2 \Rightarrow x+2=y+2 \Rightarrow x=y$

~~A_i, A_{i+n} байна~~ $A_j = A_{i+n}$ ($A_{i+2n} = A_i$). Мөн үг диагональ ямар ч талыг огтлохгүй.

Дараах бодлогын алхамуудын дагуу бодъё (I баталгаа) I алхам) (хялбар байгуулалт III цаасан дээр, энэ урт болохоор) n сондгой үед тийм диагональ оршихгүй жишээ байгуулъя. Байгуулалт: $\measuredangle A = 60^\circ$ $\measuredangle B = 30^\circ$ $\measuredangle C = 90^\circ$ байх $\triangle ABC$-г авч үзье. $n = 2k+1$ гэе. $[AC], [AB]$-н дундаж M, N гэе. $[MN]$-н дундаж T гэе. $[NT]$-г $2k$ ш тэнцүү хэсэгт хуваая. $B_1, \dots, B_{2k-1}$ гэе (хуваалтын цэгүүдээ) $BR = NT$ байх R-г авъя.



$[BC]$ дээр $BR = NT$ ... $[BR]$-г мөн адил $2k$ тэнцүү хэсэгт хуваагаад $C_1, \dots, C_{2k-1}$ гэе. $A B B_1 C_1 \dots B_{2k-1} C_{2k-1} T C$-г авч үзье. $A_1 \dots A_{4k+2}$ гэе. $C_i = A_{2i+2}$ $B_i = A_{2i+1}$ $A = A_1$ $B = A_2$ $T = A_{4k+1}$ $C = A_{4k+2}$ гэж $A_i A_{i+n}$-г сонирхож үзээд хангалттай.

$A_2; A_{2k+3}$-н хувьд. $B; B_{k+1}$ $k+1 > 1 \Rightarrow B_1 C_1$-г огтолно.

$A_i A_{i+n}$-г ямар талыг огтолно гэж батлая ($i > 1$; $i \le n$).

Үргэлжлэл II цаасанд.

Үргэлжлэл) A_iA_{n+i}-г сонирхоё. ($i \le n$).

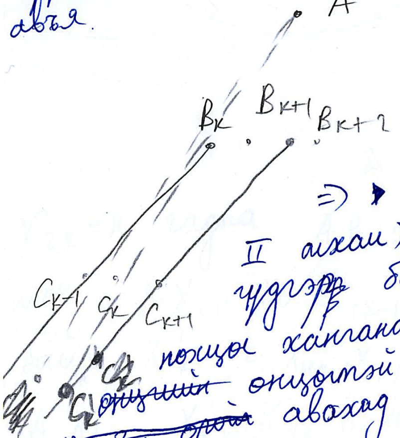
$A_{2i+1}A_{2i+2k+1}$ нь B_iC_{i+k} юм $k>1 \Rightarrow B_iC_{i+k}$ нь $B_{i+1}C_{i+1}$-г огтлоно ▸

$A_{2i}A_{2i+2k+1}$ нь $C_{i-1}B_{i+k}$ юм. $i>1$ гэе. ($i=1$ үед BB_{k+1}-г бодлоо)

$\Rightarrow C_iB_{i+k-1}$-г огтлоно ▸ Мөн TC_{2k-1} нь $B_{2k-1}C_{2k-1}$-г огтлол

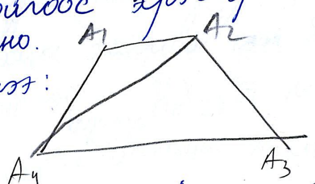
CB_{k+1} нь TC_{2k-1}-г огтлоно ▸ Одоо AC_k-г үзье.

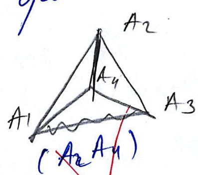
Ø AC_k нь ямар ч тал дайрахгүй байж болох тул үг асуудлыг шийдье ~~$C_{k+1}B_{k+2}$~~, $C_{k-1}B_k$-г доош нь үргэлж лууръе. C'_k-г AC'_k нь $C_{k-1}B_k$-тай огтлолцдог байхаар авъя.



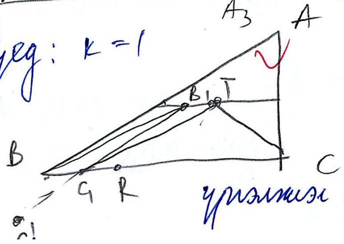
гэж аваад A_{2k+1}-ээ C'_k-р авахад бодлогын нөхцлийг хангана ▸ Мөн бусад цэгүүдээ оройгоо гарахгүй. (C'_kB_{k+1} нь B_kC_{k-1}, $B_{k+2}C_{k+1}$-г огтлохгүй) ⇒ ▸

II анхан) $n=2$ бол: Хэрэв олон өнцөгт гүдгэр бол ямар ч ~~да~~ диагоналийг авсан нөхцөл хангана. Хэрэв ~~хотгор~~ бол $180°$-с их ~~өнцгийн~~ өнцөгтэй оройгоос хэрэг оршлох орой ба энэ г-г ~~оор г орой~~ авахад болно. Жишээ:





I анхан дээр жишээ) $n=3$ үед: $k=1$



Үргэлжлэл III цаасанд.

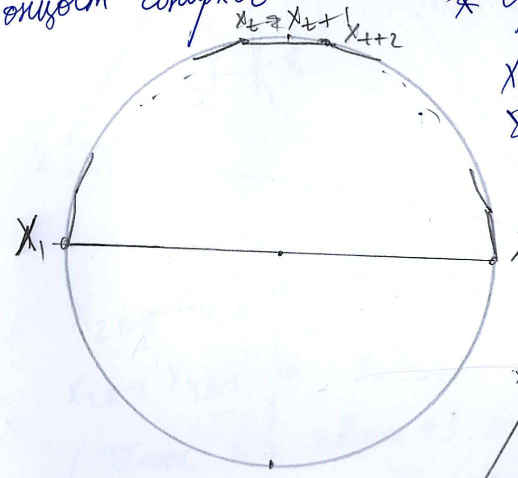
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 5 3 4   Бодлого: A 1   Хуудас/Нийт: 3 4

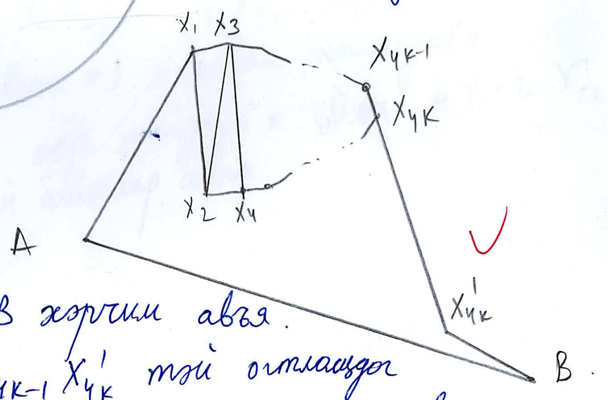
III алхам $n>2$ тэгш үед хэрэг байгуулалт:

(I алхамын хялбар байгуулалт). ~~Зөв~~ Эхлээд ~~8~~ зөв ~~8~~ 4t өнцөгт сонгоё. Оройнуудаа $X_1, \dots, X_{4t}$ гэе.



$X_1 \dots X_t X_{t+2} \dots X_{2t+1}$ 2t өнцөгтийг Y_t гэе. Одоо I алхамын хялбар байгуулалт хийе. $n=2k+1$ гэе.

Y_{2k}-г зуръя

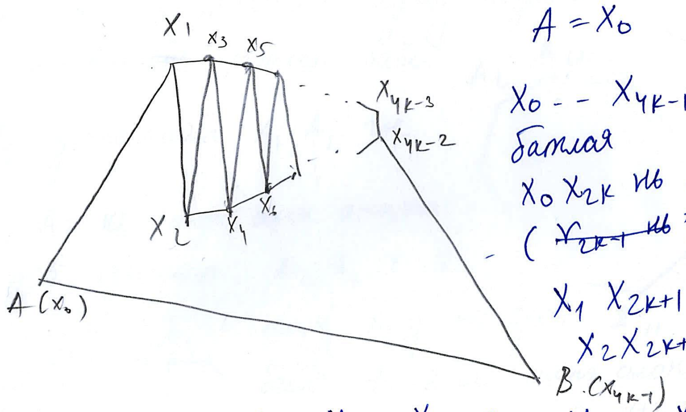


Y_{2k}-н гадна AB хэрчим авъя. мөн BX_{2k} нь $X_{4k-1}X'_{4k}$ тэй огтлолцдог байх X'_{4k}-г $X_{4k-1}X_{4k}$-н үргэлжлэл дээр авъя

$AX_1 \dots X_{4k-1}X'_{4k}B$ нь нөхцөл хангана гэж батлая. $A=X_0$ $B=X_{4k+1}$ гэж сэтгэе. X_0X_{2k+1} нь X_1X_2, X_1X_{2k+2} нь X_2X_3-г ... $X_{2k-1}X'_{4k}$ нь $X_{2k}X_{2k+1}$-г тус тус огтолно $X_{4k+1}X_{2k}$ нь $X_{4k-1}X'_{4k}$-г огтолно.

II алхамын баталгаа хийе. Мөн адил AB хэрчмийг авъя. (AX_{2k} нь X_1X_2-той огтлолцдог) (Y_{2k-1}-н гадна) Үргэлжлэл IV цаасанд.

BX_{2k-1} нь Y_{2k-1}-н гадна 1 таш...



$A = X_0$ $B = X_{4k-1}$ гэе.

$X_0 \dots X_{4k-1}$ нь ~~бо~~ байна гэж баталъя

$X_0 X_{2k}$ нь $X_1 X_2$-г огтолно.

(~~Y_{2k-1} нь Тэгэх~~ A-г авсан)

$X_1 X_{2k+1}$ нь $X_3 X_2$-г

$X_2 X_{2k+2}$ нь $X_4 X_3$-г

$X_{2k-3} X_{4k-3}$ нь $X_{2k-1} X_{2k}$-г $X_{2k-2} X_{4k-2}$ нь $X_{2k} Y_{2k+1}$-г

$X_{2k-1} X_{4k-1}$ нь $X_2 X_4, \dots, X_{4k-4} X_{4k-2}$-н аль 1-г огтолно.

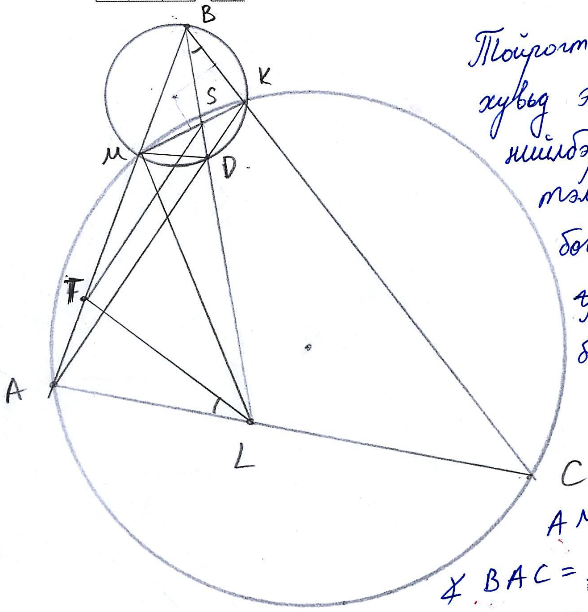
(Тэгэх B-г авсан.) III алхам батлагдав.

Иймд $n=2$-с оор шийдгүй. Мөн AB-г Y_{2k}, Y_{2k-1}-тэй огтлолцохгүй байхаар авна.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A2

Шифр: 534 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 1



Тойрогт багтсан 4 өнцөгтийн хувьд эсрэг орших өнцгүүдийн нийлбэр $180°$ байхыг (1) гэж тэмдэглэе. Мөн энэ нь гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй байна.

Уг бодлогыг дараах алхмуудаар бодъё. I алхам: $AMDL$ тойрогт багтана.

Баталгаа:
$AMKC$ тойрогт багтах тул
$\angle BAC = 180° - \angle MKC = \angle BKM$ (1-р)

$BKDM$ тойрогт багтах тул $\angle BKM = \angle BDM = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle BKM = \angle BDM = 180° - MDL \Rightarrow \angle MAL + \angle MDL = 180° \Rightarrow$ (1-р)

$AMDL$ тойрогт багтана. ▶

II алхам: ~~AMLA ∽ ΔAMBK ба ΔABS ∽ ΔAMLT~~ $TMSL$ тойрогт багтах ба $TS \parallel AK$.

Баталгаа: ~~$\angle BSK =$~~ $\angle SKB = \angle TAL$ $\quad \angle TLA = \angle LBC \Rightarrow$
$\angle ATL = \angle BSK \Rightarrow \angle ATL = 180° - \angle MTL \quad \angle BSK = \angle MSL \Rightarrow$
$\angle MTL + \angle MSL = 180° \Rightarrow MTLS$ тойрогт багтана (1-р) $\Rightarrow$
$\angle TML = \angle TSL$ $\quad AMDL$ тойрогт багтана $\Rightarrow \angle AML = \angle ADL$
$\Rightarrow \angle TML = \angle TSL = \angle ADL \Rightarrow TS \parallel AK$ ▶

II бодолт) $\Delta AML \sim \Delta BMK$ (өө) $\quad \Delta ATL \sim \Delta BSK$ (өө) $\Rightarrow$

$$\frac{SK}{SM} = \frac{SK}{BS} \cdot \frac{BS}{SM} = \frac{AT}{TL} \cdot \frac{TL}{MT} = \frac{AT}{MT} \Rightarrow TS \parallel AK$$ ▶

$n = 2\cdot 7^{k-1}$-р авахад бодлогын нөхцлийг хангана гэж батлая. Дараах бодлогыг хэдэн алхам ашиглан батлая.

I алхам: $3^{7^{k-1}} \equiv -4^{7^{k-1}} (7^k)$ $(k \geq 1\ k \in \mathbb{N})$.

Индукц ашиглан батлая. Суурь $k=1$-р авъя.

$3 \equiv -4 (7) \Rightarrow 3+4 = 7 \vdots 7$ ▶ Суурь батлагдав.

$3^{7^{k-2}} + 4^{7^{k-2}} \vdots 7^{k-1}$ байна (үнэн) гэж үзээд $3^{7^{k-1}} + 4^{7^{k-1}} \vdots 7^k$ гэж батлая. $3^{7^{k-2}} = a$ $4^{7^{k-2}} = b$ гэе $a+b \vdots 7^{k-1} \Rightarrow a^7+b^7 \vdots 7^k$ гэж батлая. $a^7+b^7 = (a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6) \vdots 7^k$

$(3,7)=(4,7)=1 \Rightarrow (a,7)=(b,7)=1$

$\Rightarrow a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6 \vdots 7$

Фермагийн бага теоремоор. $a^6 \equiv b^6 \equiv 1(7)$.

$a^5b+a^6 = a^5(a+b) \vdots 7 \Rightarrow -a^5b \equiv a^6 \equiv 1(7)$.

$a^4b^2-a^6 = a^4(b^2-a^2) = a^4(b-a)(b+a) \vdots 7 \Rightarrow a^4b^2 \equiv a^6 \equiv 1(7)$.

$a^3b^3+a^6 = a^3(a^3+b^3) = a^3(a+b)(a^2-ab+b^2) \vdots 7 \Rightarrow -a^3b^3 \equiv a^6 \equiv 1(7)$.

$a^2b^4-a^6 = a^2(b+a)(b-a)(b^2+a^2) \vdots 7 \Rightarrow a^2b^4 \equiv a^6 \equiv 1(7)$.

$ab^5+a^6 = a(b^5+a^5) = a(b+a)(b^4-b^3a+b^2a^2-ba^3+a^4) \vdots 7 \Rightarrow -ab^5 \equiv a^6 \equiv 1(7)$

$\Rightarrow a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6 \equiv 7 \equiv 0(7)$ ▶ алхам I батлагдав. ▶

II алхам) $2^{7^{k-1}\cdot 2} \not\equiv 1 (7)$. Баталгаа Фермагийн бага теоремоор. ($x^7 \equiv x(7)$)

$2^{7^{k-1}\cdot 2} = 4^{7^{k-1}} \equiv 4^{7^{k-2}} \equiv \dots \equiv 4 \not\equiv 1(7)$ ▶

III алхам) $1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+3^{2\cdot 7^{k-1}} \vdots 7^k$ Баталгаа: I алхамаар.

$3^{7^{k-1}}+4^{7^{k-1}} \vdots 7^k \Rightarrow 4^{7^{k-1}\cdot 2} - 3^{7^{k-1}\cdot 2} = (4^{7^{k-1}}+3^{7^{k-1}})(4^{7^{k-1}}-3^{7^{k-1}}) \vdots 7^k$

$\Rightarrow 4^{7^{k-1}\cdot 2} \equiv 3^{7^{k-1}\cdot 2} (7^k) \Rightarrow 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+3^{2\cdot 7^{k-1}} \equiv 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+4^{2\cdot 7^{k-1}} = \frac{2^{6\cdot 7^{k-1}}-1}{2^{7^{k-1}}-1} (7^k)$ $((x^2+x+1)(x-1)=x^3-1)$ үргэлжлэл II цаасанд.

Үргэлжлэл) $\Rightarrow 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+(2^{2\cdot 7^{k-1}})^2 = \dfrac{2^{3\cdot 2\cdot 7^{k-1}}-1}{2^{2\cdot 7^{k-1}}-1} \ (7^k)$

ахалаар $(2^{2\cdot 7^{k-1}}-1, 7)=1 \Rightarrow$ Мөн 7^k-н эйлерийн

ункц нь $\varphi(7^k)=6\cdot 7^{k-1}$ $(\varphi(p^\alpha)=(p-1)p^{\alpha-1}) \Rightarrow$

$6\cdot 7^{k-1}-1 \vdots 7^k$ $((2,7)=1 \Rightarrow (2,7^k)=1) \Rightarrow 2^{6\cdot 7^{k-1}}-1 \vdots 7^k$

$2\cdot 7^{k-1}-1, 7)=1 \Rightarrow 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+(2^{2\cdot 7^{k-1}})^2 = 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+4^{2\cdot 7^{k-1}} \equiv$

$2^{2\cdot 7^{k-1}}+3^{2\cdot 7^{k-1}} \equiv 0 \ (7^k)$ ▸ Иинхүү батлагдав ▸

лемм: $0 \le a_1, \dots, a_n \le 1$:

~~$1+a_1$~~ $(n-1)+a_1\dots a_n \geq a_1+\dots+a_n$

$a_i, a_j \le 1 \Rightarrow 1-a_i, 1-a_j \geq 0 \Rightarrow (1-a_i)(1-a_j) \geq 0$.

$\Rightarrow a_i a_j + 1 \geq a_i + a_j$. ~~Хэрэв $a_{i_1}, \dots, a\ a_1$,~~

$0 \le a_1, \dots, a_i \le 1 \Rightarrow a_1\dots a_i \le 1 \Rightarrow (1)$ гэе

$a_1+\dots+a_n \overset{(1)}{\le} a_1a_2+a_3+\dots+a_n+1 \overset{(1)}{\le} a_1a_2a_3+a_4+\dots+a_n+2 \overset{(1)}{\le} \dots$

$\dots \overset{(1)}{\le} a_1\dots a_n + n-1$ ▶ лемм батлагдав.

$$\frac{n}{a_1+\dots+a_n+1} + \frac{a_1+\dots+a_n+1}{n} \geq 2$$ (Кошийн тэнцэтгэл биш ээр). $a_1+\dots+a_n+1>0$

$$\Rightarrow \frac{n}{a_1+\dots+a_n+1} \geq 2 - \frac{a_1+\dots+a_n+1}{n} \geq 1 - a_1\dots a_n$$ гэж батлая

$$\Rightarrow 1+a_1\dots a_n \geq \frac{a_1+\dots+a_n+1}{n} \quad / \cdot n \Rightarrow \cancel{n}\,{}_{n-1} + a_1\dots a_n \cdot n \geq a_1+\dots+a_n+1$$

$\Rightarrow$ лемм-р $(n-1)+a_1\dots a_n \geq a_1+\dots+a_n \Rightarrow$ ▶ Тэнцэх нөхцөл

$a_1\dots a_n\cdot(n-1)=0 \Rightarrow a_1\dots a_n=0$ $(n>1$ үед$)$ мөн коши-оос

$a_1+\dots+a_n+1=n \Rightarrow a_1+\dots+a_n=n-1$ мөн ядаж 1 нь $0 \Rightarrow$

~~$a_1=0$ $a_2=\dots=a_n=1$ ▶ ($a_1\le\dots\le a_n$ гэж үзэв).~~

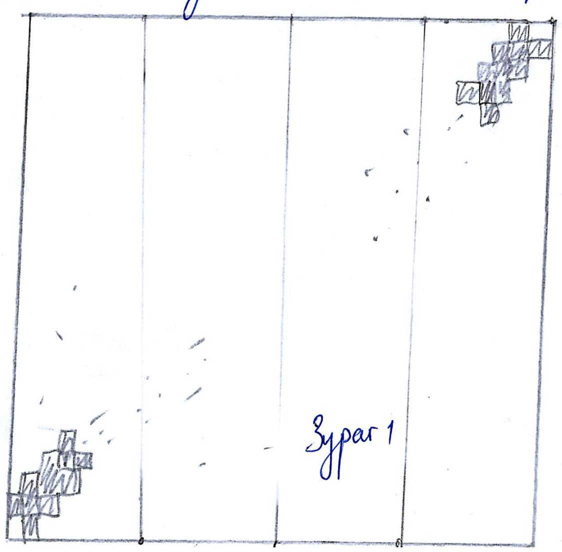
$a_i=0$ $a_1=\dots=a_{i-1}=a_{i+1}=\dots=a_n=1$ $i=\overline{1,n}$ ▶

Ямар 1 мөрийг авч үзье. Уг мөрөнд тэгш ш будагдсан нүд байвал эхнээс нь дугаарлаж байгаад хос хосоор нь аваад тэгш онцогтууд болгож чадна. Мөн цагаануудыг нь 1,1-р нь тэгш онцогт болгоё. Хэрэв сондгой ш нүд байвал мөн эхнээс нь дугаарлаж байгаад 1-г үлдээж чадна. Мөн адил цагаануудыг 1×1-р нь авна. Жишээ нь:

Иймд бид ямар ч мөрнөөс ихдээ

1-г үлдээж чадна. Иймд 20×20 дээр ямар ч будалтын ~~нь~~ хувьд 20-с ихгүй байлгаж чадна (1 хар агуулсан т(0-г)

Одоо яаж ч хуваасан 20-с багагүй гардаг байгуулалт хийе.

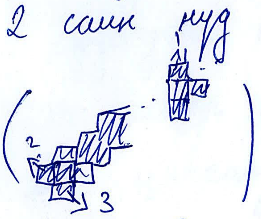


Голын диагоналийн 2 захын нүднээс бусад ба Голын диагоналийн 2 талын (хөрш) диагоналийн бүх нүдийг будсан будалт авч үзье. (зураг)

Голын диагоналийн 2 талын диагоналийн будагдсан нүднүүдийг сайн гэж. 38 сайн нүд байлаа. (19+19=38)

Үлдсэн будагдсан нүднүүдийг муу гэж. Үргэлжлэл II цаасанд үргэлжлэл) мөн 18 муу нүд бий $(20-2=18)$

2 сайн нүд 1 тэгш өнцөгтөд орж болохгүй.

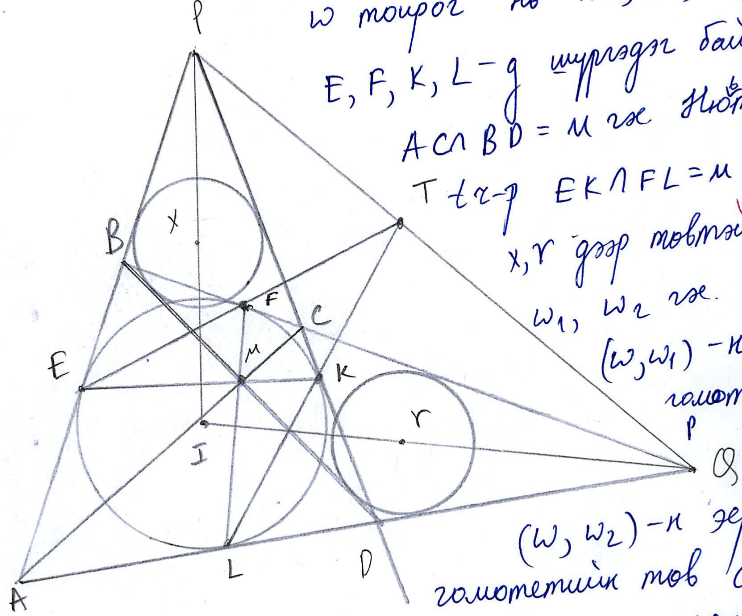


Зураг 2.

1, 2, 3 гэх. (1, 2), (1, 3) (тө-үүд нь) тус бүр дор хаяж 1 өөр будагдсан нүд дайрна ▸

38 сайн нүд байгаагийн ихдээ 18 нь муу нүдтэй хос болно. ⇒ Багадаа хос болохгүй 20 сайн нүд үлдэх ба тэд нар нь ~~өөр~~ будагдсан нүдгүй тэгш өнцөгтөд орно ▸ Иймд $\max n(P) = 20$ ▸

ω тойрог нь AB, BC, CD, DA-г E, F, K, L-д шүргэдэг байг. $AC \cap BD = M$ гэе. Ньютоний т-р $EK \cap FL = M$ байна. X, Y дээр төвтэй тойргуудаа ω_1, ω_2 гэе. (ω, ω_1)-н зэрэг гомотетийн төв P



(ω, ω_2)-н зэрэг гомотетийн төв Q $\Rightarrow$

~~Мо~~ Монже Де деламбертын т-р (ω_1, ω_2)-н гадаад гомотетийн төв нь PQ дээр оршино. Өөрөөр хэлбэл. BD, XY, PQ 1 цэгт огтлолцох ба үүнийг S гэе.
$EF \cap KL = T$ гэе. $l_\omega(T) = BD \Rightarrow$ $M \in BD \Rightarrow l_\omega(M) \ni T$.
$l_\omega(Q) = FL$ $l_\omega(P) = EK \Rightarrow l_\omega(M) = PQ \Rightarrow T \in PQ$. Мөн $TI \perp BD$.
Мөн M-н поляр шулуун PQ тул $IM \perp PQ$. Чевийн т-р
$\Rightarrow T, I, R$-г 1 шулуун дээр гэж батлая. $XY \cap PQ = S$ тул (S, P, T, Q)-г ~~ашиглавал~~ ашиглая. Мөн (ω_1, ω_2)-н сөрөг
гармоник гэж батлахтай ижил.
гомотетийн Z гэвэл (S, X, Z, Y) гармоник $\Rightarrow$ Харандаагаар
I, Z, T-г 1 шулуун гэж батлая.