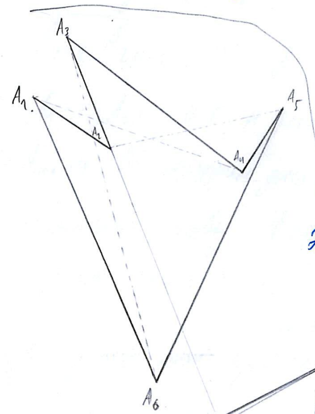
Хариу: $n=2$ - с өөр боломжгүй. (Энд $\triangle$ ← чиглэлт олцог биш!)

$n>2$ үед боломжгүй олон өнцөгтийг байгуулъя. Оройг $A_1; \dots A_{2n}$-г дугаарлая.

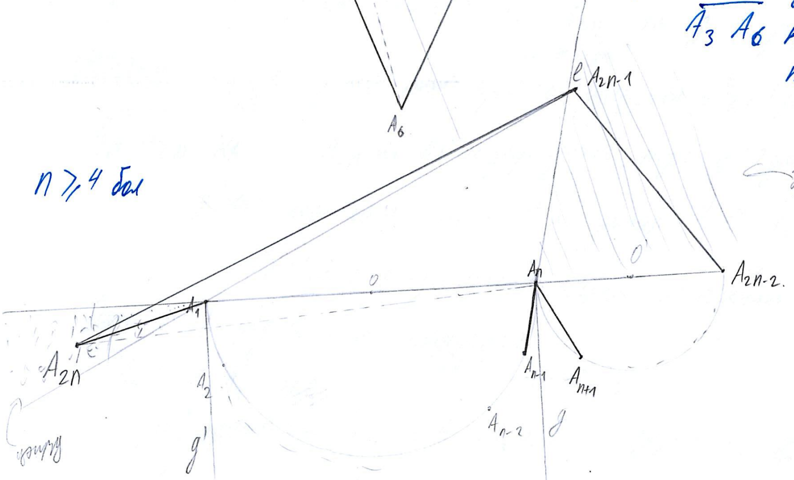
$n=3$ бол,



Энд тэнцүү тооны оройтой 2 о.ө-д хуваах гадаг диагональ нь $A_1A_{n+1}; \dots A_nA_{2n}$ - с өөр боломжгүй.

Энэ (~~олцог~~) бонцоотод $\overline{A_1A_4}; \overline{A_2A_5}; \overline{A_3A_6}$ нь бүхлээрээ багтахгүй тул $n=3$ үед нөхцөл биелэхгүй.

$n \geq 4$ бол



O, O' төвтэй дээр үзүүлсэн хагас тойргууд авъя (шүргэлцэх). $\omega; \omega'$ гэе.

ω-н 2 захыг $A_1; A_n$; ω'-н үлдэж захыг A_{2n-2} гээд,

$A_2; \dots A_{n-1}$; ~~A_{n+1}~~ -г ω дээр дараалсан цэгүүд;

$A_{n+1}; \dots A_{2n-2}$ нь ω' дээр дараалсан цэгүүд гэж авъя.

(Ө.х $A_1 \dots A_n$; $A_n \dots A_{2n-2}$ нь $\omega; \omega'$-д багтсан о.ө-үүд болно)

$A_{n-1}A_n$ шулууныг l гээд (зураасласан) тодруулсан хэсэгт A_{2n-1} оройг авна. (l; A_nA_{2n-2} шулууны дагуу.)

$A_{2n-1}A_1$ шулуунаас дээш, OO' шулуунаас доош хэсэг (оршлоцол) орших тул A_{2n-2} (үзэлсэн хэсэгт) авч болно. Энэ нь о.ө болохыг шалгахад төвөггүй.

~~Харин $A_1 A_{n+1}$, $A_2 A_{n+2}$~~

A_n-с доош, OO'-д перпендикуляр d цацраг авъя.

$\overline{A_1 A_{n+1}}, \dots \overline{A_{n-2} A_{2n-2}}$ нь d-г дайрах нь илэрхий.

Харин d нь $A_1 \dots A_{2n}$ О.Ө-н дотор оршихгүй тул нөхцөлийг хангахгүй. ($n \geq 4$ тул $A_1 A_{n+1}$ нь OO' шулуунаас доош байрлана.)

$\overline{A_{n-1} A_{2n-1}}$ диагоналийн хувьд A_{2n-1} нь тодруулсан хэсэгт орших тул ℓ-с доош шулуун болно. $\Rightarrow$ $\overline{A_{n-1} A_{2n-1}}$ нь d-г дайрна. $\Rightarrow$ нөхцөл хангахгүй.

A_1-г d-тэй адил тодорхойлогдох d' цацраг авъя. ($d \perp OO'$)

$\overline{A_n A_{2n}}$ нь A_{2n} нь OO'-н дээр орших тул d'-г дайрна. ($A_n \in OO'$)

d' нь мөн адил $A_1 \dots A_{2n}$ дотор $\nexists$ $\Rightarrow$ $\overline{A_n A_{2n}}$ бүрэлдэх боломжгүй. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Энэ О.Ө-д нөхцөл хангах диагональ байхгүй. $\Rightarrow$ ▲. $\Rightarrow$ $n \geq 3$ үед боломжгүй ▲.

Одоо $n=2$ үед болохыг харуулъя.

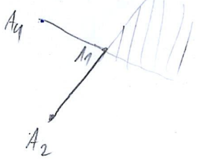
$A_1 A_2 A_3 A_4$ гэе.

Хэрэв гүдгэр бол, $\forall P; Q \in A_1 A_2 A_3 A_4$ дотоод утгаар $\Rightarrow$ $\overline{PQ} \subset A_1 A_2 A_3 A_4$ тул

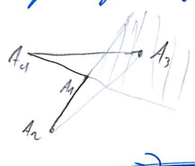
$A_1 A_3$ диагональ хангахгүй. ($A_1; A_3 \in A_1 A_2 A_3 A_4 \Rightarrow \overline{A_1 A_3} \subset A_1 A_2 A_3 A_4$ учир).

Хотгор бол, аль 1 өнцөг нь $> 180°$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A_4 A_1 A_2 > 180°$ гэе. (т. эрхтэй тул)



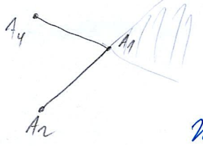
О.Ө нь өөрийгөө огтлохгүй тул A_3 нь зураастай хэсэгт орших ёстой. (1) $\Rightarrow$



~~$\Rightarrow$ $A_1 A_3$-н $\forall$ цэг нь $\angle A_1 A_2 A_3$, $\angle A_3 A_4 A_1$ дотор оршино $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ $A_1 A_2 A_3 A_4$ дотор оршино.~~

~~$\Rightarrow$ Иймд $\forall$ ... диагональ олдох болно.~~

(1) -д



нэгэн тайлбарлая.

4 өнцөгт нь дотоод өнцөг 360° тул 2 хотгор $(>180^\circ)$ өнцөгтэй байж чадахгүй.

Иймд $\angle A_3A_4A_1 < 180^\circ$; $\angle A_3A_2A_1 < 180^\circ$ байна. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A_3 нь A_1A_4 шулууны A_2-и эсрэг талд $\exists$
A_3 нь A_1A_2 шулууны A_4-и эсрэг талд $\exists$ $\Rightarrow$ A_3 нь зураглагдсан хэсэгт $\exists$.

~~(2)-д~~

~~$\angle A_1A_4A_3 < 180$ A_1, A_4, A_3-и харьцангуй байрлал~~

A_3-и байрлалаас $\triangle A_2A_3A_4 \supset \triangle A_2A_1A_4$ байх нь илэрхий.

$\Rightarrow$ $A_1A_2A_3A_4 = \triangle A_2A_3A_4 \setminus \triangle A_2A_1A_4$ ~~[illegible]~~ $\cup \overline{A_1A_4} \cup \overline{A_1A_2}$ болно.

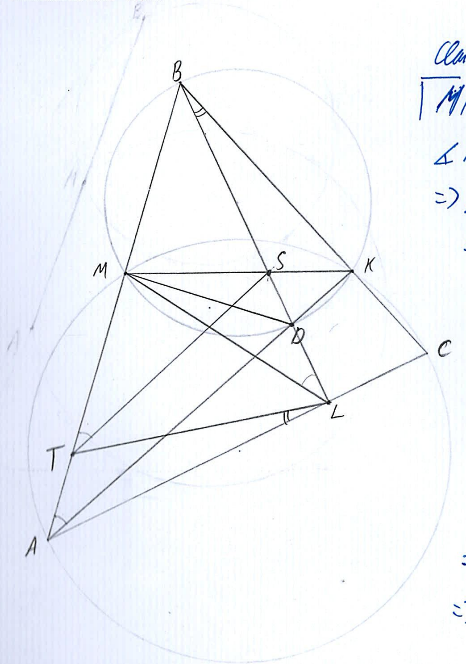
хэрчим

A_1A_3 хэрчмийн цэгүүд ~~[illegible]~~ $\triangle A_2A_1A_4 \setminus \{A_1\}$-д орохгүй; $\triangle A_2A_3A_4$-д орно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $A_1A_3 \subset A_1A_2A_3A_4$ болно. $\Rightarrow$ A_1A_3 нь $A_1A_2A_3A_4$-д бүхлээрээ багтана. $\Rightarrow$ нөхцөл хангах диагональ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall$ 4 өнцөгтөд 2 $\triangle$-д хуваах, бүхлээрээ багтах диагональ $\exists$.

Хариу: $n \neq 2$.



Claim 1. MSLT cyclic.

Γ MKCA cyclic тул

∡MAC = ∡MKB ⇒

⇒ ∡MSB = ∡MKB + ∡KBS =

= ∡MKB + ∡CBL = ∡MAC + ∡ALT =

= ∡TAL + ∡ALT = ∡MTL ⇒

⇒ MSLT cyclic болно. ▲⌋

Claim 2. MDLA cyclic.

Γ ∡MAC = ∡MKB байгаа ба

BKDM cyclic тул ∡MKB = ∡MDB ⇒

⇒ ∡MAC = ∡MDB болно. ⇒

⇒ ∡MAL = ∡MDB ⇒ MDLA cyclic ▲⌋

Claim 1-с ∡MTS = ∡MLS = ∡MLD.

Claim 2-с ∡MLD = ∡MAD

⇒ ∡MTS = ∡MAD = ∡MAK ⇒

⇒ TS ∥ AK болно. ▲

$n = 2\cdot 7^{k-1}$ гэж авахад хангалттай. Үүнийг харуулъя.

$1+2^n+3^n = 1+2^{2\cdot 7^{k-1}}+3^{2\cdot 7^{k-1}} = 1+4^{7^{k-1}}+9^{7^{k-1}}$ болно.

Экспонент өргөх теоремоор, $9-2 \vdots 7$; $9 \not\vdots 7$; $2 \not\vdots 7$ тул,

$v_7(9^{7^{k-1}} - 2^{7^{k-1}}) = v_7(9-2) + v_7(7^{k-1}) = 1+k-1 = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 9^{7^{k-1}} \equiv 2^{7^{k-1}} \pmod{7^k}$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+4^{7^{k-1}}+9^{7^{k-1}} \equiv 1+2^{7^{k-1}}+4^{7^{k-1}} \pmod{7^k}$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x = 2^{7^{k-1}}$ гэвэл $1+2^n+3^n \equiv 1+x+x^2 \pmod{7^k}$ болно.

$1+x+x^2 = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ байна. $\Rightarrow$

~~Claim 1. $x-1 = 2^{7^{k-1}} - 1 \not\equiv 0\ (7^k)$ байна.~~

~~$2^{7^{k-1}} \equiv 2^{7^{k-2}} \equiv \dots \equiv 2\ (7)$ болно. $\Rightarrow 2^{7^{k-1}} \not\equiv 1\ (7) \Rightarrow$~~

~~$\forall m \in \mathbb{Z}$: $m^7 \equiv m\ (7)$ тул $\Rightarrow 2^{7^{k-1}} \not\equiv 1\ (7^k)$ болно.~~

~~Claim 2. $x^3 - 1 = 8^{7^{k-1}} - 1 \equiv 0\ (7^k)$ байна.~~

~~Экспонент өргөх теоремоор,~~

~~$v_7(8^{7^{k-1}} - 1) = v_7(8^{7^{k-1}} - 1^{7^{k-1}}) = v_7(8-1) + v_7(7^{k-1}) = 1+k-1 = k \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 8^{7^{k-1}} - 1 \vdots 7^k \Rightarrow 8^{7^{k-1}} \equiv 1\ (7^k)$ болно $\Rightarrow 8^{7^{k-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{7^k}$~~

~~Claim 1; 2-с $1+x+x^2 = \dfrac{x^3-1}{x-1} \equiv 0\ (7^k)$ болно.~~

Claim 1. $(x-1; 7) = 1$ байна.

Энд $x-1 \not\vdots 7$ гэж харуулахад хангалттай.

$\forall m \in \mathbb{Z}$: $m^7 \equiv m \pmod 7$ тул (Ферматаар)

$x = 2^{7^{k-1}} \equiv 2^{7^{k-2}} \equiv \dots \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x-1 \equiv 2-1 = 1 \pmod 7 \Rightarrow x-1 \not\vdots 7$ болно.

Claim 2. $x^3-1 \vdots 7^k$ байна. ($x^3 = 2^{(7^{k-1}\cdot 3)} = 8^{7^{k-1}}$)

Экспонент өргөх леммээр, $8-1 \vdots 7$; $8 \not\vdots 7$; $1 \not\vdots 7$ тул,

$v_7(x^3-1) = v_7(8^{7^{k-1}}-1) = v_7(8^{7^{k-1}} - 1^{7^{k-1}}) = v_7(8-1)+v_7(7^{k-1}) =$

$= 1+k-1 = k \Rightarrow x^3-1 \vdots 7^k$ болно. ▲

Claim 1; Claim 2-с $v_7\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right) = v_7(x^3-1) - v_7(x-1) \geq k - 0 = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 \vdots 7^k$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+2^n+3^n \equiv 1+x+x^2 \equiv 0\,(7^k) \Rightarrow 1+2^n+3^n \vdots 7^k$ болно. ▲

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B1

Шифр 657 Оноо 7

Хуудас/Нийт 1 2

Индукцаар $\forall (a_i)$ $0 \le a_1; \dots a_n \le 1$ тооны хувьд

$1 - a_1 a_2 \dots a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n \le n$ болохыг батлая.

$n = 1$ үед $1 - a_1 \le 1$ болох ба $a_1 \ge 0$ тул илэрхий.

$n \ge 2$ үед, $n-1$ үед үнэн гэе.

$F(a_1; \dots a_n) = 1 - a_1 \dots a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ гэе.

Claim. $a_1; \dots a_n$ дотроос дор хаяж 1 нь $=1$ үед F нь хамгийн их утга авна. [Эсрэгээр $a_1; \dots a_n < 1$ гэе.

Тэгвэл, $a_2; \dots a_n$-г тогтмол байлгаад a_1-г өсгөн F-н их утга гаргая.

$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 1 - a_2 \dots a_n$ ба $a_2; \dots; a_n < 1$ тул $a_2 \dots a_n < 1 \Rightarrow 1 - a_2 \dots a_n > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a_1-г $1 - a_1$ ~~...~~ нэмэгдэхэд F өснө. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ бүх $a_1; \dots a_n < 1$ үед аль 1-г нь 1-р солиход өсөх тул F-н хамгийн их утга нь дор хаяж 1 нь $=1$ байх үед юм. ▲] (Эсрэгээр (жишээ нь) Lagrangian multiplier-ийн аргаар шийдэж болно.)

Claim-с. $(\forall i)$ a_i нь тэгш хэмтэй тул $a_n = 1$ гэе. $\Rightarrow$

$\Rightarrow F = 1 - a_1 \dots a_{n-1} + a_1 + \dots + a_{n-1} + 1$ болно. Индукцийн таамаглалаас

$F - 1 \le n - 1 \Rightarrow F \le n$ болно. $\Rightarrow$ ▲

$\frac{1 - a_1 a_2 \dots a_n}{n} \le \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \Longleftrightarrow (1 - a_1 \dots a_n)(1 + a_1 + \dots + a_n) \le$ ~~n~~ $\Longleftrightarrow$

$\Leftarrow$ $1 - a_1a_2\cdots a_n + (1-a_1\cdots a_n)(a_1+\cdots a_n) \le n$ болно.

~~$a_1 \cdots a_n \le 1$~~ $a_1\cdots a_n \geq 0$ тул $1-a_1\cdots a_n \le 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $1-a_1\cdots a_n + (1-a_1\cdots a_n)(a_1+\cdots+a_n) \le 1-a_1\cdots a_n + a_1+\cdots+a_n$ болно.

Иймд дээр баталснаар $1-a_1\cdots a_n + a_1+\cdots+a_n \le n \Rightarrow$ Бодлого бодогдоно.

$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$; $a_n=0$ ($n=1$ үед $a_1=0$) үед

$\frac{1-a_1\cdots a_n}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}$ болно. $\Rightarrow$ Т. Х. Н болно.

Дээрх индукцийн шилжилтийг өөрөөр,

$F = 1-a_1\cdots a_n + a_1+\cdots+a_n - n$ гэвэл, $(a_1,\cdots a_n)\in[0,1]^n$ тул $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~∂F~~ $a_1,\cdots a_n$ нь хамааралгүй тул

$L = F$ гэж авбал $\frac{\partial F}{\partial a_i} = 1 - a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i: a_1 a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n = 1 \Rightarrow (a_1,\cdots a_n) = (1,\cdots 1)$ үед,

бүгд $1 \vee 0$ байх үед F нь max min-г авна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ангилсан тохиолдол шалгахаас

$F \le n$ байх нь гарна. $\Rightarrow$ ▲.

Шифр 657 Оноо 7 Хуудас/Нийт 1 3

Хариу: 20.

20-с хэтрэхгүйг харуулъя.

Ямар дурын будалтанд 20-с хэтрэхгүй 1-с олонгүй хар нүдтэй т.ө ашиглан хуваах боломжийг харуулахад хангалттай. ($n(P)$ нь min тоо тул $n(P) \le$ ~~дэх~~ ашигласан тоо) байна.)

Энд мөр бүрээр нь $1\times k$ т.ө-үүдэд хуваана.

i-р мөр нь  гэе. Тэгвэл,

Будагдсан нүд нь $0 \vee 1$ бол, 1×20-оо буюу мөрөө бүтнээр нь авна.

Будагдсан нүд ≥ 3 бол, ~~1-р нүдэн~~ I хар нүд i_1; III-рх i_3; … $2k+1$-рх нь i_{2k+1}-р нүдэнд байгаа гэе. ⇒

⇒ 1-с i_3-1 хүртэл $1\times(i_3-1)$.

i_3-с i_5-1 хүртэл. $1\times(i_5-i_3)$

⋮ Т.ө-үүд авна.

i_{2k-1}-с $i_{2k+1}-1$ хүртэл $1\times(i_{2k+1}-i_{2k-1})$

будагдсан нүд $2k < S \le 2k+2$ гэж үзэж болно. ⇒

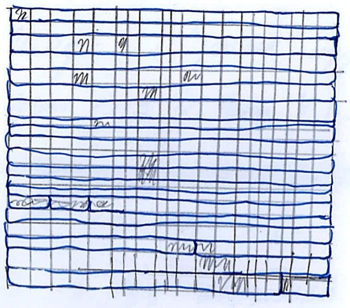
⇒ i_{2k+1}-с 20 хүртэл ихдээ 2 хар нүд байгаа тул i_{2k+1}-с 20 хүртэл $1\times(21-i_{2k+1})$ т.ө авахад нөхцөл хангана.

Ингэж мөрийг хуваахад 1 мөрөнд ихдээ 1 т.ө нь 1-с олонгүй хар нүдтэй байна. ([illegible], $1\times(21-i_{2k+1})$ нь болно.)

Иймд мөр бүрээс ихдээ 1-ш олдох тул энэ хуваалтад ихдээ (20×20 тул) 20-ш 1-с олонгүй х. нүдний т. ө олдоно. ⇒)

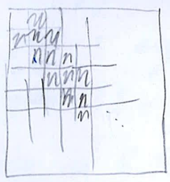
⇒) $n(P) \le 20$ болно. ▲.

Ийм хуваалтын жишээнь,

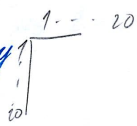


болно.

Одоо



хэлбэрийн буюу



гэж дугаарлавал,

$2 \le i \le 19$-н хувьд $(i-1; i)$; $(i; i-1)$; $(i; i)$ нүднүүд, $(20, 19)$; $(19, 20)$ нүднүүд будагдсан энэ будалтын хувьд $n(P) = 20$ гэж баталъя.

Энд $(i; i)$ хэлбэрийн х. нүдийг "голын"; үлдсэнийг "захын" гэе.

Захын нүднүүдийн байрлалаас харахад аль 1 хос захын нүднүүдийг агуулах т. ө нь голын нүд агуулах нь илэрхий.

Учир нь, энэ 2 нүдний нэг нь доод захын нүдний нэг гэе (т. эрэмбэгүй тул) $(i+1; i)$ болно. Нөгөө нүд нь $(j+1; j) \vee (j; j+1)$ байна.

1) $(j+1; j)$ бол, $i < j$ гэж үзэхэд алдагдалгүй. ⇒

⇒ $(i+1; i)$; $(j+1; j)$-г агуулах т. ө д $(i+1; i+1)$ орно.

$(i \le i+1 \le j$; $i+1 \le i+1 \le j+1)$ учир.

2) $(j; j+1)$ бол,

~~$i+1=j$ бол, $(i+1; i+1)$ нь орно. $j \leq i+1 \leq i+1$; … $i+1$~~

$i \leq j$ бол, $(i+1; i+1)$ орно. $i+1=i+1$; $i \leq i+1 \leq j+1$ тул байна

$j < i$ бол, $(i; i)$ орно. $i=i$; $i+1 \geq i \geq j$ тул байна.

Иймд 2 "захын" нүдийг агуулах т.ө-д дор хаяж 3 х.нүд орно. $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ ~~…~~ $\forall$ т.ө-д ядаж 1 ш захын нүд орно.

~~$\Rightarrow$ Х.нүд агуулсан т.ө нь 2ш … х.н~~

Яг адилаар 2ш гол агуулах т.ө $\nexists$.

$\Rightarrow$ Х.нүд агуулсан т.ө нь 2-г агуулахын тулд 1ш гол, 1ш зах-г агуулна.

Харин 38ш зах; 18ш гол байгаа тул 2ш Х.Н-тэй т.ө-н тоо нь ≤ 18 байна. $\Rightarrow$ Нийт хар нүд $= 56 = 0\cdot(0$ш-тэй т.ө$) +$

$+ 1\cdot(1$ш х.нүд т.ө$)$

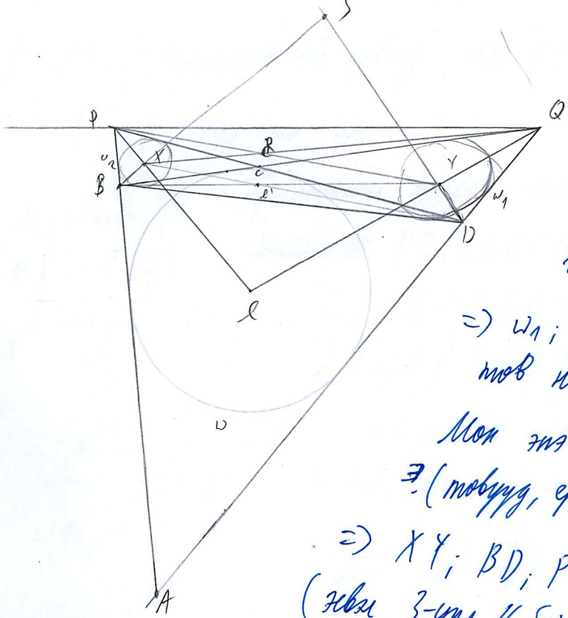
$+ 2\cdot(2$ш х.нүд т.ө$) \Leftarrow$

$\Rightarrow 56 \leq 1\cdot(1$ш х.нүд т.ө$) + 2\cdot 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 \leq 1\cdot(1$ш х.нүд т.ө$) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $n(p) \geq 20$ байна ▲.

(II арга)



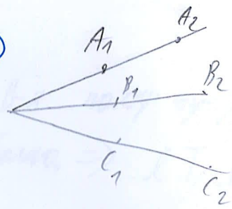
Энд P нь ω_2; ω-н эерэг ~~гомотетийн~~ гомотетийн төв, Q нь ω_1; ω-н эерэг гомотетийн төв $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ω_1; ω_2-н + гомотетийн төв нь PQ дээр $\exists$ (гомотетийн чанар).

Мөн энэ төв нь XY; BD дээр $\exists$ (төвүүд, ерөнхий шүргэгчтэй). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ XY; BD; PQ нэг цэгт огтлолцоно. (Эсвэл 3-уул $\parallel$ байна.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



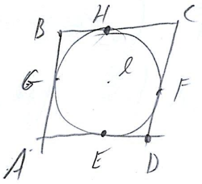
(Lemma) $\forall$ 3 шулууны хувьд concurrent $\vee$ $\parallel$ бол, $A_1B_1 \cap A_2B_2$; $A_1C_1 \cap A_2C_2$; $B_1C_1 \cap B_2C_2$ colinear байдаг (яат ч дугаарласан.)

Энэ чанарыг PQ; XY; BD дээр 4 ашиглахад,

$BX \cap DY = S$; $BY \cap DX = I'$ гэвэл,

$(R; C; S)$; $(A; I'; R)$; $(A; I; S)$; $(C'; I'; I)$-гурвалууд коллинеар болно.

(II шийд) $ABCD$ 4 өнцөгтийн хувьд $AB; BC; CD; DA$-г ω нь $G; H; F; E$-д шүргэнэ гэе.

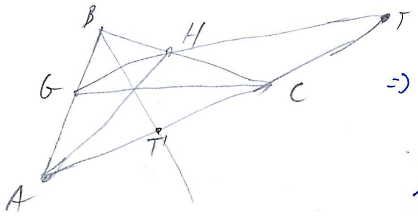


Брианшоны бөхсөн тохиолдлыг ашиглан

~~BCAD~~ $BD \cap AC \cap HE \cap GF = T'$ гэе.

$BD \cap AH \cap GC \neq \emptyset$

$BD \cap AF \cap CE \neq \emptyset$ болно.



$GH \cap AC = T$ гэе. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Чев; Менелайгаар,

$$\frac{CT}{AT} = \frac{CH}{BH} \cdot \frac{BG}{GA} = \frac{CT'}{AT'} \Rightarrow$$ $\triangle ACD$-н хувьд төл адил тул $GH; EF; AC$ нь 1 цэгт(T) огтлолцоно.

(ω-н:) B-н поляр шулуун GH; D-нх $EF \Rightarrow BD$-н поляр цэг нь T болно. $\Rightarrow IT \perp BD$ байгаа тул $R \in IT$ гэж батлахад хангалттай болно. Мөн $\frac{CT}{AT} = \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DE}{EA} \overset{(D\text{-н шүргэгчүүд})}{=}$

$= \frac{CF}{AE}$ болно.

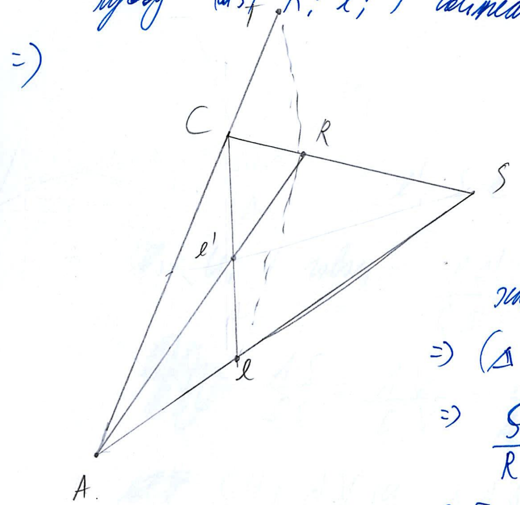
(iii алхам) I; II алхамд олсон үр дүнг ашиглавал,

$(R; C; S); (A; l'; R); (A; l; S); (C'; l'; l)$ collinear

(~~...~~ T_s) $T \in AC$ ба $\frac{CT}{AT} = \frac{CF}{AE}$ байх T-г

хувьд (T_s) $R; l; T$ collinear гэж батлахад хангалттай болно. =)

=)



болно (Not to scale!)

Энд Менелай бичвэл, ($\triangle(SCA)$)

$$\frac{CT}{AT} = \frac{Al}{lS} \cdot \frac{SR}{RC}$$ гэж батлахад хангалттай. =)

=) ($\triangle ClS$)-д: Менелай =)

$$\Rightarrow \frac{SR}{RC} \cdot \frac{Cl'}{ll'} \cdot \frac{lA}{AS} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CT}{AT} = \frac{Al}{lS} \cdot \frac{ll'}{Cl'} \cdot \frac{AS}{lA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CT}{AT} = \frac{ll'}{Cl'} \cdot \frac{AS}{lS};$$ гэж батлахад хангалттай.

Энд анхаарах зүйл нь $\frac{CT}{AT} = \frac{CF}{AE}$; S нь $BX \cap DY$ тул

$\triangle ABD$-н A оройн гадаад багтсан тойргийн төв;

l'-нь $BY \cap DX$ тул $\triangle BCD$-н багтсан тойргийн төв болно

=) Бодлого гарна