Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A1

Шифр: 500 Оноо: 4 + ~~3 оноо ...~~ ~~хасав~~

Хуудас/Нийт: 1 / 14

+3 оноо нэмэв Д. Батзаяа Баяраа

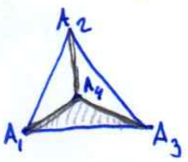
Хариу: $n=2$.

• $n=2$ үед ямар ч бодлогод өгсөн диагоналийг татаж чадна гэж харуулъя.

Дурын гүдгэр ~~A~~ $A_1A_2A_3A_4$-дөрвөн өнцөгтийн хувьд.
Гүдгэр бүрхүүлийг нь авч үзье. Мэдээж $A_1A_2A_3A_4$-олон өнцөгт тул гүдгэр бүрхүүл нь гүдгэр дүрс байна ⇒ Дор хаяж 3 өнцөгтэй (1)

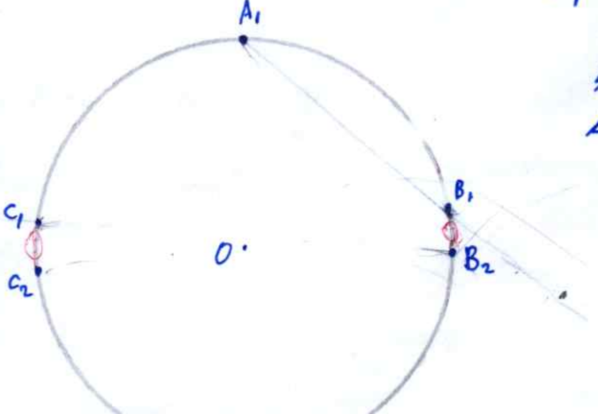
• Хэрэв гүдгэр/б-нь 4-өнцөгт бол ⇒ $A_1A_2A_3A_4$ - гүдгэр ⇒ Дурын диагональ нь $A_1A_2A_3A_4$-дээр оршино ⇒ A_1A_3-диагональ нь ~~хоёр~~ бодлогын нөхцлийг хангана.

• Гүдгэр/б-нь 4-өөс цөөн өнцөгтэй бол (1)-ээс яг 3 өнцөгтэй. ⇒
⇒ $A_1A_2A_3A_4$-н яг 1 ч орой нь ~~гэ~~ Г/Б-нь орой биш.
Уг оройг A_4- гэж үзээд явуулъя. ⇒ Г/Б-н оройнууд нь $A_1A_2A_3$. Энд $A_1A_2A_3$-нь Г/Б-тул A_4-нь $\triangle A_1A_2A_3$-дээр оршино ⇒ ~~$A_1A_2A_4$-нь A_1A_3-диагональтай~~ ~~⇒ Гүдгэр оройтойн талбай $=\triangle A_1$~~



⇒ A_4-нь $\angle A_1A_2A_3$-~~ын~~ дотор оршино ⇒
⇒ A_4A_2-нь $A_1A_2A_3A_4$-олон өнцөгт дээр бүхлээрээ оршино ⇒ A_2A_4-нь бодлогын нөхцлийг хангана.

• $n>2$-үед бодлогод өгсөн диагоналийг ~~татаж~~ олдохгүй олон өнцөгт байгуулъя. ~~Нэгж радиус~~
Нэгж радиустай O-төвтэй тойрог татъя. Тойргийн ямар нэг диаметрийн ~~дээр A_1A_2~~ 2-талд дээр A_1, A_{2n-1}-цэгүүдийг авъя.



~~$\angle A_{2n-1}B_1A_{2n-1}$~~
$\angle A_{2n-1}B_1$.
~~$\angle A_{2n-1}B_1B_2=$~~

~~$\angle A_{2n-1}B_1$.~~ 46°
~~$\angle A_{2n-1}A_1B_1=$~~ -байхаар B_1 ~~цэгийг тойрог дээр авъя.~~

$\angle A_1OB_1 = 89°$-байх B_1-цэг тойрог дээр авъя.

$\angle B_2OA_{2n-1} = 89°$-байх B_2-цэгийг $A_1B_1A_{2n-1}$-дээр авъя.

$\angle A_1OC_1 = 89°$-байх C_1-цэгийг B_1

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 500 | Бодлого: A 1 | Хуудас/Нийт: 2 / 4

C_1-г агуулаагүй $\breve{B_1B_2}$-дээр $A_2; A_4; \dots; A_{2n-2}$-цэгүүдийг энэ дараалалаар нь байрлуулсан

B_1-г агуулаагүй $\breve{C_1C_2}$-дээр $A_3; A_5; \dots; A_{2n-3}$-цэгүүдийг энэ дараалалаар нь байрлуулъя.

Энд $A_1A_{n+1}; A_2A_{n+2}; \dots; A_iA_{n+i}; \dots; A_nA_{2n}$-диагоналууд нь л гүдгэр олон өнцөгтийн ижил дүйтэй 2ш г/о-д хуваах чадна.

Энд $\forall i \in \{1; \dots; n-1\}$: ~~$A_{i+1}A_{i+2}$~~ $A_{i+1}A_{i+2}$ хөвч нь

$A_1; \dots; A_i$, ба $A_{i+3} \dots A_{2n-1}$-цэгүүдийг тусгаарлана $\Rightarrow$ $(n>2)$

$\Rightarrow$ A_iA_{i+n}-диагональ нь $A_{i+1}A_{i+2}$-талыг огтлоно $\Rightarrow$ г/о-дээр бүхэлдээ оршиж чадахгүй.

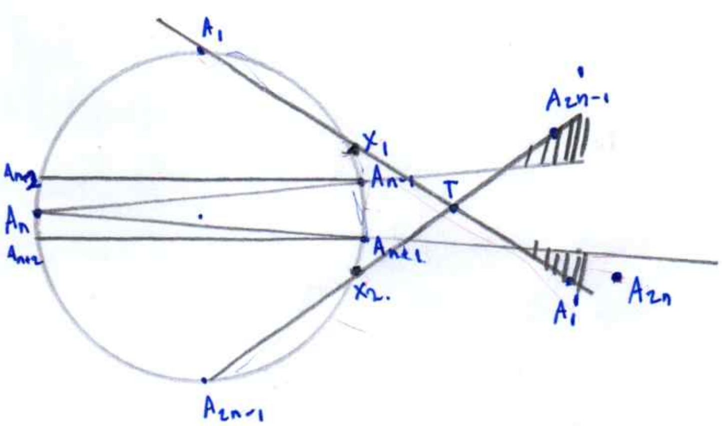
Одоо A_nA_{2n}-н хувьд.

~~n-тэгшгүй ба A_n-нь $\breve{C_1C_2}$ дээр орш. $A_{n-1}A_{n+1}$-г агуулах~~

$\breve{B_1B_2}; \breve{C_1C_2}$-н аль нэг нь $A_{n-1}; A_{n+1}$-г агуулна тэрийг нь $\breve{X_1X_2}$-гэе. Нөгөөгийн нь Y_1Y_2-гэе.

$A_1X_1 \cap A_{2n-1}X_2 = T$-гэе.

Нэгэнт $A_n \in \breve{Y_1Y_2}$ ба $A_{n-1}; A_{n+1} \in \breve{X_1X_2}$ тул $\angle A'_{2n-1}TA'_1$-д оршоо г $\angle A_{n-1}A_nA_{n+1}$-т оршоогүй цэг олдох ба тэрийг нь A_{2n}-гэе.



Энд A_{2n}-нь $\angle A'_{2n-1}TA'_1$-д оршно $\Rightarrow$ $A_1A_{2n}; A_{2n-1}A_{2n}$-нь бусад цэгүүдээр огтлохгүй

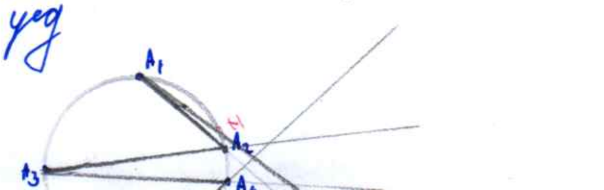
$\Rightarrow$ $A_1A_2 \dots A_{2n}$-гүдгэр дүрс мөн.

A_{2n}-нь $\angle A_{n-1}A_nA_{n+1}$-т оршихгүй тул $A_{2n}A_n$-нь эсвэл $A_{n-2}A_{n-1}$-г / эсвэл $A_{n+2}A_{n+1}$-г } огтлоно.

$\Rightarrow$ A_nA_{2n}-нь бүхэлдээ багтахгүй. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ дүрс нь 2ш г/о дүрсэд бодлогын нөхцөл хангах диагональ

$n = 3$ үед

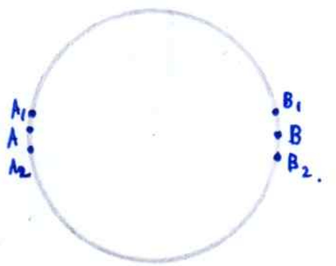


Хариу: $n=2$.

• $n>2$ үед ~~өөр олон~~ бодлогын нөхцөлийг хангах диагональ агуулдаггүй о/ө -олдоно гэж харуулъя.

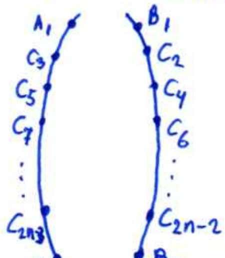
Нэгж радиустай ω-~~тойрог~~ тойргийн хувьд, ω-н ямар нэг $[A, B]$-диаметрийн хувьд

$A_1; A_2$-цэгийг A-тэй маш ойрхон ба $\overset{\frown}{A_1A_2}$-нь A-г агуулдаг.
$B_1; B_2$-цэгийг B-тэй маш ойрхон ба $\overset{\frown}{B_1B_2}$-нь B-г агуулдаг.
$A_1; A_2$-нь (AB)-н нэг талд } -дахаар
B_1B_2 -нь (AB)-н нэг талд }
байхаар $A_1; A_2; B_1; B_2$- цэгүүдийг авъя.

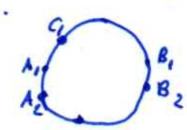


Бид $C_1C_2...C_{2n}$-гэсэн өгсөн нөхцөлийг хангадаггүй ~~о~~ о/ө -байгуулах гэж байгаа гэе.
~~Одоо бид A_1A_2-дээр~~

Одоо $\overset{\frown}{A_1A_2}$-дээр $C_3; C_5; C_7; ...; C_{2n-3}$-цэгүүдийг ~~-тэй~~ ω-дээр
$A_1; C_3; C_5; C_7; ...; C_{2n-1}; A_2$ - гэсэн дараалалаар байрлуулъя.
~~B_1B_2~~ Мөн $\overset{\frown}{B_1B_2}$-дээр $C_2; C_4; ...; C_{2n-2}$- цэгүүдийг ω-дээр
$B_1; C_2; C_4; C_6; ...; C_{2n-2}; B_2$ - гэсэн дараалалаар байрлуулъя.



Одоо C_1- цэгийг $\overset{\frown}{A_1B_1}$-дээр дурын байдлаар, C_{2n-1} цэгийг $\overset{\frown}{A_2B_2}$-дээр дурын байдлаар байрлуулъя.



Ингэхэд $C_1C_2; C_2C_3; ...; C_{2n-2}C_{2n-1}$- хэрчмүүд нь огтлолцохгүй гэдэг нь хялбар гарна.
~~Мөн ∀i~~ Энд $C_1C_2...C_{2n}$ -о/ө-г орой тоо нь тэгш байх 2n о/ө-д хуваах диагоналиуд нь C_iC_{i+n} -хэлбэрийн байна гэдгийг анзаарвал. ($i\in\{1; ...; n\}$)
Энд $\forall i\in\{1; ...; n-1\}$; C_iC_{i+n}-хэрчим нь тойргийн цэгүүдийг

Мөн $n>2$ тул C_iC_{i+n} − диагональ нь $C_{i+1}C_{i+2}$ −талыг огтолно $\Rightarrow$

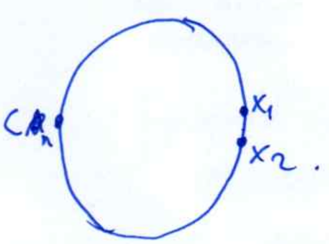
$\Rightarrow$ $C_1C_2; \dots C_{2n}$ −д бүгдээрээ багтахгүй.

~~Од~~ Иймд ~~C_1C_{2n}~~ C_{2n} −сүүлийн $C_{2n}C_1$ ~~нь~~, $C_{2n}C_{2n-1}$ −нь ~~бүх~~ $C_1C_2; \dots; C_{2n-2}C_{2n-3}$ −г огтлохгүй ба C_nC_{2n} −нь ямар нэг хэрчмийг огтолдог байхаар байрлуулахад хангалттай.

Үүний тулд. ~~Хэрэв~~

C_{2n} −нь X_1X_2 −дээр оршдог гэе (~~$X_1X_2 \in \{A_1A_2$~~ $\left[\begin{array}{l} X_1X_2 \equiv A_1A_2 \\ X_1X_2 \equiv B_1B_2. \end{array}\right.$

Хэрэв C_{2n} −нь (AB)−н орчим дээр оршдоггүй бол $C_{2n}C_n$ −нь $\left.\begin{array}{l} C_{n+1}C_{n+2} \\ C_{n-1}C_{n-2} \end{array}\right\}$ −н аль нь

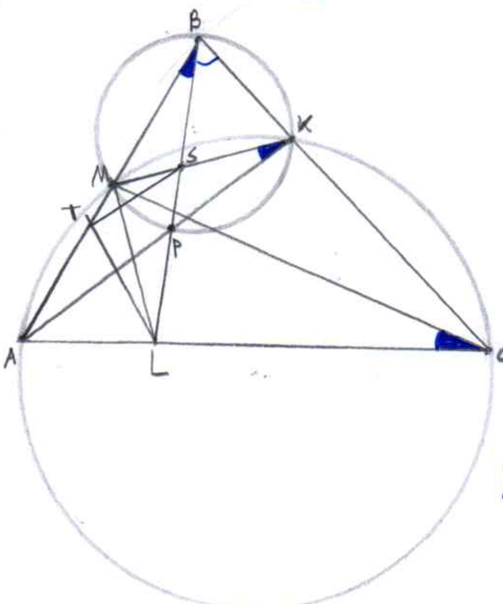


Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A2

Шифр: 500 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 1

(Энд D-г P-гээр андуурсан байна. Иймд P≡D-гээр уншина уу).



$\angle ABL = x$ -гэе

MBKP-cyclic $\Rightarrow \angle MBP = \angle MKP = x$

MKCA-cyclic $\Rightarrow \angle MKA = \angle MCA = x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MBL = \angle MCL = x \Rightarrow$ MBCL-cyclic $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AML \sim \triangle ACB$.

MKCA-cyclic $\Rightarrow \triangle BMK \sim \triangle BCA$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AML \sim \triangle KMB \Rightarrow$

$\frac{BK}{MK} = \frac{AL}{AM}$ (1) мөн $\angle BKM = \angle LAM$

$\left.\begin{array}{l}\angle BKM = \angle LAM \\ \angle KBS = \angle ALT\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle KBS \sim \triangle ALT \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BK}{KS} = \frac{AL}{AT}$ (2) $\Big\} \Rightarrow$

(1) ба (2)-оос

$\Rightarrow \dfrac{\frac{\cancel{BK}}{MK}}{\frac{\cancel{BK}}{KS}} = \dfrac{\frac{\cancel{AL}}{AM}}{\frac{\cancel{AL}}{AT}} \Rightarrow \frac{KS}{MK} = \frac{AT}{AM} \Rightarrow 1 - \frac{KS}{MK} = 1 - \frac{AT}{AM} \Rightarrow \frac{MS}{MK} = \frac{MT}{MA} \Big\} \Rightarrow$ Фалесын

th-оор $TS \parallel AK$.

~~$1+2^{3\cdot7^x+1}+3^{3\cdot7^x+1} \vdots 7^x$ - гэж баталъя.~~

Энд $1+2^{3\cdot7^x+1}+3^{3\cdot7^x+1} \vdots 7^{x+1}$ - гэж баталъя.

$1+2^{3\cdot7^x+1}+3^{3\cdot7^x+1} = \left(2^{3\cdot7^x+1}-2\right)+\left(3^{3\cdot7^x+1}+3\right) = 2\left(2^{3\cdot7^x}-1\right)+3\left(3^{3\cdot7^x}+1\right)$.

~~Иймд~~ (Энд $\varphi_a(b)$-ээр a-н b-г хуваах хамгийн их зэргийн нь тэмдэглэвэл.)

Иймд (1) $2^{3\cdot7^x}-1 \vdots 7^{x+1}$
(2) $3^{3\cdot7^x}+1 \vdots 7^{x+1}$ - гэж батлахад хангалттай.

(1)-г баталъя.
x-ээр индукцлэе.
Суурь: $x=0$ үед $2^3-1 \vdots 7 \Rightarrow$ үнэн.
Таамаг: $x=k$ үед $2^{3\cdot7^k}-1 \vdots 7^{k+1}$-байг.
Шилжилт: $x=k+1$ буюу $2^{3\cdot7^{k+1}}-1 \vdots 7^{k+2}$ - гэж баталъя.

$2^{3\cdot7^{k+1}}-1 = 8^{7^{k+1}}-1 = \left(8^{7^k}\right)^7-1 = \left(8^{7^k}-1\right)\left(8^{7^k\cdot6}+8^{7^k\cdot5}+\dots+8^{7^k\cdot1}+1\right)$

Энд $8^{7^k}-1 = 2^{3\cdot7^k}-1 \vdots 7^{k+1}$ (Таамаг) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 8^{7^k\cdot6}+8^{7^k\cdot5}+\dots+8^{7^k}+1 \vdots 7$ гэж батлахад хангалттай.

$8\equiv1 \pmod 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8^{7^k\cdot6}+8^{7^k\cdot5}+\dots+8^{7^k}+1 \equiv 1^{7^k\cdot6}+1^{7^k\cdot5}+\dots+1^{7^k}+1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$ -
- байж батлагдав.

(2)-г баталъя.
x-ээр индукцлэе.
Суурь: $x=0$ үед $3^3+1 = 27+1 = 28 \vdots 7 \Rightarrow$ үнэн.
Таамаг: $x=k$-үед $3^{3\cdot7^k}+1 \vdots 7^{k+1}$ - байг.
Шилжилт: $x=k+1$ үед $3^{3\cdot7^{k+1}}+1 \vdots 7^{k+2}$ - гэж баталъя.

$3^{3\cdot7^{k+1}}+1 = 27^{7^{k+1}}+1 = \left(27^{7^k}\right)^7+1 = \left(27^{7^k}+1\right)\left(27^{7^k\cdot6}-27^{7^k\cdot5}+27^{7^k\cdot4}-27^{7^k\cdot3}+27^{7^k\cdot2}-27^{7^k}+1\right)$

$\Rightarrow 27^{7^k \cdot 6} - 27^{7^k \cdot 5} + 27^{7^k \cdot 4} - 27^{7^k \cdot 3} + 27^{7^k \cdot 2} - 27^{7^k} + 1 \vdots 7$ - гэж батлахад хангалттай.

$27 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 27^{7^k \cdot 6} - 27^{7^k \cdot 5} + \ldots + 1 \equiv (-1)^{7^k \cdot 6} - (-1)^{7^k \cdot 5} + \ldots - (-1)^{7^k} + 1 =$

$= (-1)^6 - (-1)^5 + (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 1+1+1+1+1+1+1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$ -
-байж батлагдав.

Иймд $\forall x$: $n = 3 \cdot 7^{x-1} + 1$ -үед
$1 + 2^n + 3^n \vdots 7^x$ -байна.

• Case 1| $a_1+a_2+\dots+a_n \le n-1$ -бол.

$\forall i: a_i \ge 0 \Rightarrow a_1a_2\dots a_n \ge 0 \Rightarrow \frac{1-a_1a_2\dots a_n}{n} \le \frac{1}{n}$

Мөн $a_1+\dots+a_n \le n-1 \Rightarrow \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \ge \frac{1}{1+(n-1)} = \frac{1}{n}$ } $\Rightarrow \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \ge \frac{1-a_1a_2\dots a_n}{n}$.

• Case 2| $a_1+a_2+\dots+a_n > n-1$ -бол (1) ~~[$a_1\le a_2\le\dots\le a_n$ -гэж үзэхэд ерөнхийллэг алдагдахгүй.~~

$\forall i,j \in \{1;\dots;n\}: (i<j)$: Хэрэв $a_i+a_j \le 1$-бол.

$a_1+a_2+\dots+a_n = (a_i+a_j)+(a_1+a_2+\dots+a_{i-1}+a_{i+1}+\dots+a_{j-1}+a_{j+1}+\dots+a_n) \le$

$\le 1+\underbrace{1+1+\dots+1}_{n-2} = n-1$ - болох нь (1)-г зөрчинө. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_i+a_j>1 \Rightarrow a_i-(1-a_j)>0$. (2)

Энд $1-a_i \ge 0$, $1-a_j \ge 0$ } $\Rightarrow (1-a_i)(1-a_j)\ge 0 \Rightarrow 1-a_i-a_j+a_ia_j \ge 0 \Rightarrow a_i\cdot a_j \ge (a_i-(1-a_j))\cdot 1$ (3)

Энд $a_i-(1-a_j)>0$ ба $1 \ge a_i \ge a_i-(1-a_j)$ } мөн $1\ge 1\ge 0$ -тул дээр дурдсан тэнцэтгэл биш ашиглаж үргэлжлүүлж чадна. Мөн $a_i+a_j=$

Одоо $\boxed{S=a_1+a_2+\dots+a_n \text{ -гэе.}}$

$a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n = a_1\cdot a_n\cdot(a_2\cdot\dots\cdot a_{n-1}) \overset{(3)}{\ge} (a_1-(1-a_n))\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_{n-1}$.

$(a_1-(1-a_n))a_2\cdot\dots\cdot a_{n-1} = ((a_1-(1-a_n))\cdot a_{n-1})\cdot(a_2\cdot\dots\cdot a_{n-2}) \ge (a_1-(1-a_n)-(1-$

Одоо $b_1=a_1-(1-a_n)$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3$, $\vdots$, $b_{n-1}=a_{n-1}$, $b_n=1$ } гэсэн $b_1;\dots;b_n$ -тоонуудын хувьд $\forall i\in\{2;\dots;n-1\}$ $1\ge b_i\ge 0$ - нь үнэн.

b_1-н хувьд (2)-оор $b_1>0$ мөн $1-a_n\ge 0$-тул $a_1\ge b_1$ ба $1\ge a_1$ } $\Rightarrow 1\ge b_1\ge 0$.

b_n-н хувьд $b_n=1$ тул $1\ge b_n\ge 0$

Мөн $b_1+\dots+b_n = a_1-(1-a_n)+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+1 = a_1+\dots+a_n = S$ - тул

$b_1;\dots;b_n$-нь $a_1;\dots;a_n$-тай яг ижил чанартай.

Тэгвэл (3)-аас $a_1a_n \ge b_1b_n$ ...

Яг адилаар

~~$c_1 = a_1 - (1-a_n) - (1-a_{n-1})$~~
~~$b_2 = a_2$~~
~~$b_3 = a_3$~~
~~$\vdots$~~
~~$b_{n-2} = a_{n-2}$~~
~~$b_{n-1} = 1$~~
~~$b_n = 1$~~

~~$c_1 = a_1 - (1-a_n) - (1-a_{n-1})$~~
~~$c_2 = a_2$~~

$$a_1 - (1-a_n) - (1-a_{n-1})$$
$$\|$$

$c_1 = b_1 - (1-b_{n-1})$
$c_2 = b_2 = a_2$
$c_3 = b_3 = a_3$
$\vdots$
$c_{n-2} = b_{n-2} = a_{n-2}$
$c_{n-1} = 1$
$c_n = 1$
байх

$c_1;\dots;c_n$ - тоонууд нь $b_1;b_2;\dots;b_n$ - буюу $a_1;\dots;a_n$ - тоонуудтай яг ижил чанартай.

(3)-аар $b_1 \cdot b_{n-1} \geq c_1 \cdot c_{n-1}$ ба $\forall i \in \{2;\dots;n-2\}: b_i = c_i$, $1 = b_n = c_n$ $\Rightarrow b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \geq c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \overset{(4)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \geq c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n$. (5)

Яг адилаар $a_1-(1-a_n)-(1-a_{n-1})-(1-a_{n-2})$.

$d_1 = c_1 - (1-c_{n-2})$
$d_2 = c_2 = b_2 = a_2$
$d_3 = c_3 = b_3 = a_3$
$\vdots$
$d_{n-3} = c_{n-3} = b_{n-3} = a_{n-3}$
$d_{n-2} = 1$
$d_{n-1} = 1$
$d_n = 1$

байх $d_1;\dots;d_n$ - тоонууд нь $c_1;\dots;c_n$ - буюу $a_1;\dots;a_n$ - тоонуудтай яг ижил чанартай.

(3)-аар ~~$d_1 \cdot d_n$~~ $c_1 c_{n-2} \geq d_1 \cdot d_{n-2}$, $\forall i \in \{2;\dots;n-3\}: c_i = d_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 \cdot \ldots \cdot c_n \geq d_1 \cdot \ldots \cdot d_n \overset{(5)}{\Rightarrow}$

$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geq d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Үүнтэй төстэй явцаар 1-индекстэй гишүүн, 2-индекстэй гишүүн 2 дээр (3)-р ~~тэ~~ чанарыг ашигласны дараа $e_1;e_2;\dots;e_n$ - тоонууд гарсан ~~ба~~ бал.

$e_1 = a_1 - (1-a_n) - (1-a_{n-1}) - (1-a_{n-2}) - \ldots - (1-a_2)$
$e_2 = 1$
$e_3 = 1$
$\vdots$
$e_n = 1$

ба $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \geq e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n \Rightarrow$

~~$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_n \geq a_1 (1-a_2)$~~

$e_1 = a_1 - (1-a_n) - \ldots - (1-a_2) =$
$= (a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (n-1) =$

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр 688 Бодлого B1. Хуудас/Нийт 3 3

$\Rightarrow a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geqslant S-(n-1). \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1-a_1\cdot\ldots\cdot a_n}{n} \leq \frac{1-(S-(n-1))}{n} = \frac{n-S}{n}.$$

Нөгөө талаас $\frac{1}{1+a_1+\ldots+a_n} = \frac{1}{1+S}.$

Энд $S > n-1 \Rightarrow S+1 > n \Rightarrow S^2+S > nS \Rightarrow 0 > nS-S^2-S \Rightarrow n > nS-S^2-S+n \Rightarrow$

$\Rightarrow n > (n-S)(1+S) \Rightarrow \frac{1}{1+S} > \frac{n-S}{n} \Rightarrow \frac{1-a_1\cdot\ldots\cdot a_n}{n} < \frac{1}{1+a_1+\ldots+a_n}$ - болно

~~бат~~ батлагдав.

Энд Case 2-т тэнцэл хүрэхгүй.

Case 1-т тэнцэл хүрэхийн тулд

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot\ldots\cdot a_n &= 0 \\ a_1+\ldots+a_n &= n-1 \end{aligned}\right\}.$$

~~Энд~~ $\Rightarrow a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$-н ядаж нэг нь 0 ~~гэж~~ т

тэгш хэмтэй тул $a_1 = 0$ гэе.

$a_1+\ldots+a_n = a_2+\ldots+a_n \leq 1+\ldots+1 \leq n-1.$

Энд $a_1+\ldots+a_n = n-1$-тул тэнцэл хүрнэ $\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 &= 1 \\ a_3 &= 1 \\ &\vdots \\ a_n &= 1 \end{aligned}\right\}.$

$\Rightarrow$ ~~Нэг нь~~ $a_1 \ldots a_n$-н нэг нь 0, бусад нь 1-үед л тэнцэл хүрнэ. (Шалгавал үнэн болох нь илт).

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B2

Шифр: 688 Оноо: 6 Хуудас/Нийт: 1/3

(б/н = будагдсан нүд)
(т/ө = тэгш өнцөгт)

Хариу: 20.

• Дурын P-будалтын хувьд $n(P) \leq 20$-гэж баталъя.

~~Дурын~~ i-р мөрний хувьд уг мөрийн нүднүүд нь зөвхөн i-р мөрөн дээр орших тэгш өнцөгтүүдээр дараах байдлаар хуваая.

Уг мөрөн дээрх будагдсан нүднүүд нь $b_1, b_2, \dots, b_k$-багана дээр оршдог байг ($b_1 < b_2 < \dots < b_k$).

$k = 2k' + b$-гэе. $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right.$

1-р т/ө-нь (1-ээс b_2)-хүртэл
2-р т/ө-нь (b_2+1-ээс b_4)-хүртэл.
3-р т/ө-нь (b_4+1-ээс b_6)-хүртэл
⋮
i-р т/ө-нь ($b_{2i-1}+1$-ээс b_{2i})-хүртэл.
⋮
k'-р т/ө-нь ($b_{2k'-1}+1$-ээс $b_{2k'}$)-хүртэл.
k'+1-р т/ө нь ($b_{2k'}+1$-ээс 20)-хүртэл

багануудыг хуваагдах байхаар хуваахад 1, 2, …, k'-р т/ө-нь яг 2ш будагдсан нүд агуулна ⇒ ~~i-р мөр нь ихдээ~~ k'+1-ээс бусад т/ө-нь 1-ээс олонгүй будагдсан нүд агуулж чадахгүй ⇒

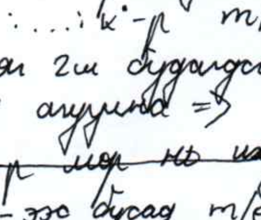
⇒ i-р мөрөнд ихдээл 1ш ~~яг 1 ээ~~ 1-ээс олонгүй будагдсан нүд агуулах тэгш өнцөгт бий. Энд 20ш мөр бий ⇒

⇒ Нийт ихдээл 20ш 1-ээс олонгүй б/н агуулах т/ө-бий ⇒

⇒ $n(P) \leq 20$ ✓ −1

• Одоо $n(P) \geq 20$-байх P-будалтыг байгуулъя.

Хүснэгтийн мөр баганыг дараах байдлаар дугаарлая:



~~Одоо i+j=20 байх~~ i-р мөр, j-р багана нүдийг (i,j)-гэе.

Одоо (1) $i+j=20$ байх бүх (i,j)-нүдийг хар өнгөөр,

(2) (1;20);(20;1)-ээс бусад $i+j=21$ байх бүх (i,j)-нүдийг хар өнгөөр.

(3) $i+j=22$ байх бүх (i,j)-нүдийг хар өнгөөр будъя.

Ингэхэд яг 56ш нүд хараар будагдана.

Эсрэгээр нь ~~n(P)<20 байх~~ 1-ээс олонгүй ~~цоонгүй~~ нүд агуулах т/ө-н тоо нь 20-оос бага байх T-хуваалт ~~олдсон~~ гэж олддог гэе.

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 56 = 2a_2 + a_1 \\ 20 > a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 56 = 2a_2 + a_1 < 2a_2 + 20 \Rightarrow 2a_2 > 36 \Rightarrow a_2 > 18 \Rightarrow \boxed{a_2 \geq 19} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Дор хаяж 19см ба 2см хар нүд агуулах м/о -той.

1ба 3-р үйлдлээр будагдсан 38см нүдийг X гэе.
2-р үйлдлээр будагдсан 18 см нүдийг Y

- 2см X-нүд агуулах м/о- олдохгүй гэж харуулъя
 хэрэглэх нь S м/о олддог гэвэл. (S-нь 2см X-г агуулна)

Аль нэгийг нь 1-р үйлдлээр будагдсан гэж үзэхэд явцуурахгүй.
(Учир нь 1ба 3-р үйлдлүүд нь тэгш хэмтэй) $\Rightarrow$ Үр нүдийг
(c_1, d_1)-гэе $(c+d=20)$. Нөгөө нүдийг нь $(c_2 ; d_2)$-гэе.
~~$c_1 = 19, d_1 = 2$ бол.~~ Энд $\left[\begin{array}{l} c_2+d_2=20 \\ c_2+d_2=22 \end{array}\right. \Rightarrow c_1+d_1 \leq c_2+d_2$.

- $\left.\begin{array}{l} c_1 = 19 \\ d_1 = 1 \end{array}\right\}$ бол. ямар ч ~~X-нүд~~ $(c_1 ; d_1)$-ээс ялгаатай X-нүдний хувьд үр нүдний баганы индекс 1-ээс их байна $\Rightarrow$ $d_2 > 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $d_2 > d_1$. Иймд $(c_1 ; d_1)$, $(c_2 ; d_2)$-г агуулах аль ч тэгш өнцөгт $(19, 2)$-гоон Y-нүдийг агуулах байх зөрчил (S-нь Y-г агуулахгүй)

- $\left.\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ d_1 = 19 \end{array}\right\}$ бол ба адилхаар $c_2 > d_2 \Rightarrow (c_1 ; d_1) ; (c_2 ; d_2)$-г агуулах аль ч тэгш өнцөгт $(2 ; 19)$-гоон Y-нүдийг агуулах байх зөрчил (S-нь Y-г агуулахгүй)

- $\left.\begin{array}{l} c_1 > 1 \\ d_1 < 19 \end{array}\right\}$ бол $c_1 + d_1 \leq c_2 + d_2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$ ~~$\left[\begin{array}{l} c_2 > c_1 \\ d_2 > d_1 \end{array}\right.$ - аль нэг. хойгуу~~

~~нөхцөлийг харвал.~~

- Хэрэв $c_1 = c_2$ - бол $d_1 \leq d_2$.
 Энд $(c_1 ; d_1) \neq (c_2 ; d_2) \Rightarrow d_1 \neq d_2 \Rightarrow d_1 < d_2$. $\Big\} \Rightarrow$
- Хэрэв $c_1 > c_2$ бол (1)-ээс $d_1 < d_2$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c_1<c_2 \\ d_1<d_2 \end{array}\right\}$ -ийн ядаж нэг нь биелнэ. ~~$c_1<c_2$~~

$c_1<c_2$ -бол S-нь (c_1+1, d_1)-гэсэн Y-г агуулна $\Rightarrow$ зөрчил.

$d_1<d_2$ -бол S-нь $(c_1; d_1+1)$-гэсэн Y-г агуулна $\Rightarrow$ зөрчил.

$\Rightarrow$ 2ш X агуулах m/ө олдохгүй

• 2ш Y-нүд агуулах m/ө олдохгүй гэж харуулъя.
Эсрэгээр нь 2ш Y-агуулах S-m/ө ~~олон~~ олдсон гэвэл.

Үл 2ш Y-г $(c_1;d_1)$; $(c_2;d_2)$-гэе. ~~$c_1 c_2$~~ ($c_1 \leq c_2$ -гэж үзэхэд ерөнхийллийг алдагдуулахгүй)

$c_1=c_2$ -бол ~~$d_1 d_2$~~ $\left.\begin{array}{l} c_1+d_1=21 \\ c_2+d_2=21 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1=d_2 \Rightarrow (c_1;d_1)=(c_2;d_2) \Rightarrow$ зөрчил.

$\Rightarrow$ ~~$c_1 d_1$~~ $c_1<c_2 \Rightarrow$.

~~$\Rightarrow (c_1;d_1);(c_2;d_2)$-г агуулах m/ө -нь~~

$\Rightarrow$ S-нь $(c_1+1;d_1)$-гэсэн X-г агуулна $\Rightarrow$ зөрчил. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2ш Y-агуулах m/ө -олдохгүй.

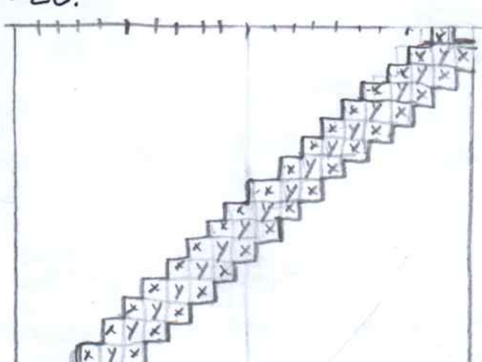
Иймд 2ш m d/н агуулах m/ө-нь яг 1ш X, яг 1ш Y-агуулна.

Энд яг 18ш Y-бий $\Rightarrow$ ~~..~~ $a_2 \leq 18$-байна.

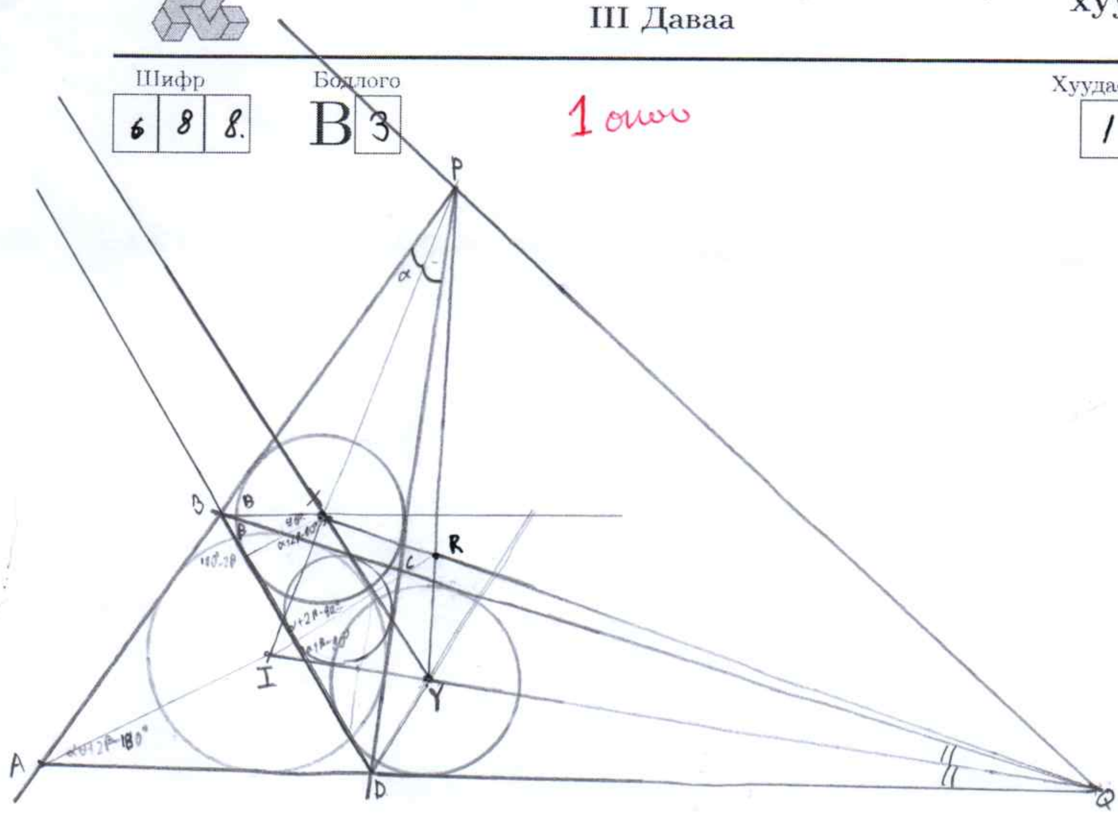
Гэтэл эсрэгээр нь үзсэнээр $a_2 \geq 19 \Rightarrow$ зөрчил.

$\Rightarrow$ үл бүдүүлтийн хувьд $n(P) \geq 20$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Иймд } \forall P:\ n(P) \leq 20 \\ \text{Үл бүдүүлтийн хувьд } n(P) \geq 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Хариу: 20.



1 оноо



Лемм. Хавтгай дээр нэг нь нөгөөгөө агуулдаггүй, ~~3ш тойргийн~~ ~~хувьд~~ $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ - гэсэн 3ш тойргийн хувьд $\omega_1; \omega_2$-н гадаад ~~ш~~ ерөнхий шүргэгчийн огтлолцлыг O_3, $\omega_2; \omega_3$-н г/е/ш-н о/ц-г O_1, $\omega_1; \omega_3$-н г/е/ш-н о/ц-г O_2 - гэвэл $O_1; O_2; O_3$ - нь коллинеар байна (Менелайн th-оор хялбар батлагдана).

ΔPBD-д багтсан $\odot$-г ω_P
ΔBQD-д багтсан $\odot$-г ω_Q
$(BD) \cap (XY) = T$
} - ~~гэвэл~~ гэвэл. $\omega_1; \omega_2; \omega$ - тойргуудын хувьд лемм ёсоор $T; P; Q$ - коллинеар $\Rightarrow$ $BD; XY; PQ$ - нь конкуррент.

ω-н радиусыг r
ω_P-н радиусыг r_P
ω_Q-н радиусыг r_Q
} - гэе. $\Rightarrow$ Q-дээр төвтэй гомотетоор.

$$\frac{QI}{QY} = \frac{r}{r_Q}.$$

P-дээр төвтэй гомотетоор $\frac{PI}{PX} = \frac{r}{r_P}.$

энд ~~$r = APD$ AP S_{APD}.~~ ~~$r_P = \frac{2S_{PXD}}{PD} = \frac{2 \cdot \frac{PX \cdot PD \sin\angle XPD}{2}}{PD} = PX \sin\angle X$~~

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр			Бодлого		Хуудас/Нийт	
6	8	8	B	3	2	2

Одоо $IXRY$-дөрвөн өнцөгт нь тойрог багтаана гэж харуулъя.