Эхлээд $n=2$ нь бодлогын нөхцөл хангахыг баталъя.

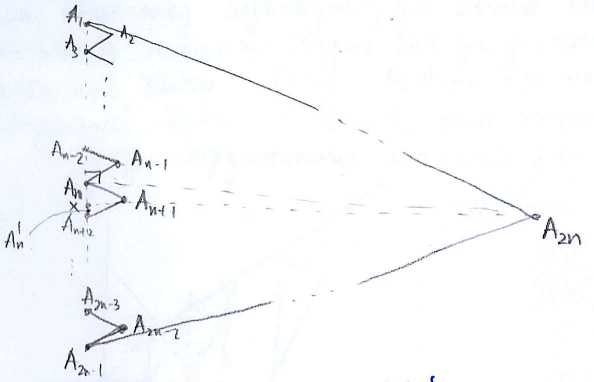
Энэ үед дөрвөн өнцөгт өгөгдөх бөгөөд уг дөрвөн өнцөгт гүдгэр бол дурын диагональ татаж болно, эсрэг тохиолдолд дараах хэлбэртэй байна: 

Энэ үед BD диагональ татаж болно. ✓

Одоо $n \geq 3$ нь бодлогын нөхцлийг хангахгүй гэж баталъя, ө.х уг чанарыг хангах диагональ татаж чадахгүй $2n$ өнцөгт байгуулъя.

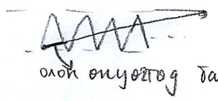
Эхлээд n сондгой үед байгуулъя.

Нэг шулуун дээр хөрш хоёр цэгийн зай адилхан байх $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ цэгүүд аваад, $A_1A_2 = A_3A_2 = A_3A_4 = A_5A_4 = \dots = A_{2i-1}A_{2i} = A_{2i+1}A_{2i} = \dots = A_{2n-3}A_{2n-2} = A_{2n-1}A_{2n-2}$ байх уг шулууны нэг талд орших $A_2, \dots, A_{2n-2}$ цэгүүд авъя. Дараа нь, $A_1A_{2n} = A_{2n-1}A_{2n}$ ба $\angle A_{2n-1}A_1A_{2n} > \angle A_{2n-1}A_1A_2$ байх A_{2n} цэгийг уг шулууны $A_2, \dots, A_{2n-2}$ цэгүүд буй талд авъя.



n сондгой тул A_n нь $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ цэгүүд оршиж буй шулуунд орших ба $A_1A_n = \frac{n-1}{2} \cdot A_1A_3 = A_nA_{2n-1}$ юм. Мөн $A_{2n}A_1 = A_{2n}A_{2n}$ тул $A_1A_{2n-1} \perp A_nA_{2n}$ байна. Одоо $A_{2n}A_{n+1}$ шулуун $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ цэгүүдийг дайрсан шулууныг A_nA_{n+2} хэрчим дотор огтлохыг баталъя. $A_nA_{2n} \perp A_1A_{2n-1}$ тул $\angle A_nA_{2n}A_{n+1} < \angle A_nA_{2n}A_{2n-1} = 90^\circ - \angle A_nA_{2n-1}A_{2n} < 90^\circ - \angle A_nA_{2n-1}A_{2n-2} = 90^\circ - \angle A_nA_{n+2}A_{n+1}$ байна, иймд $X = A_nA_{n+2} \cap A_{2n}A_{n+1}$ бол $\angle A_nXA_{n+1} = 90^\circ - \angle A_nA_{2n}A_{n+1} > \angle A_nA_{n+2}A_{n+1}$ иймд X нь A_nA_{n+2} хэрчим дотор оршино (X нь хэрэв $A_{n+2}A_{2n-1}$ хэрчим дотор оршдог бол $\angle A_nXA_{n+1} = \angle A_nA_{n+2}A_{n+1} - \angle A_{n+2}A_{n+1}X < \angle A_nA_{n+2}A_{n+1}$ байх ёстой байсан). Одоо XA_{n+2} хэрчим дотор A_n' цэг аваад, $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n'A_{n+1}\dots A_{2n}$ олон өнцөгт бодлогын нөхцлийг хангахыг харуулъя. ~~2n~~ Уг олон өнцөгтийн тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваах бүх диагоналиуд нь

$A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \dots, A_{n-1}A_{2n-1}, A_n'A_{2n}$ юм. n сондгой тул, эдгээр диагоналиуд $A_{2i}A_{2j+1}$ хэлбэртэй байна (нэг нь тэгш, нөгөө нь сондгой дугаартай). $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \dots, A_{n-1}A_{2n-1}$ нь олон өнцөгтөд бүрэн багтахгүй, учир нь



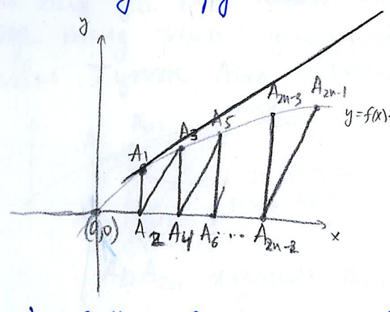
$A_{2i}A_{2j+1}$ хэлбэртэй дурын диагоналийн хувьд $A_{2i}A_{2j+1}$ хэрчмийн A_{2j+1} оройн орчимд олон өнцөгтийн гадна талд бий. Харин A_n' оройн сонгох ёсоор, $A_n'A_{2n}$ хэрчим $A_{n+1}A_{n+2}$ хэрчимтэй огтлолцох ба огтлолцлын цэг Y бол $A_n'Y$ хэрчим олон өнцөгтийн гадна талд байна. Иймд уг $2n$ оройтой олон өнцөгтөд бодлогын нөхцлийг хангах диагональ татах боломжгүй. ✓

Одоо n тэгш тохиолдлыг авч үзье, $n \geq 4$ байна.

„$2n$ оройтой олон өнцөгтийг түл"

$A_1A_2\dots A_{2n}$ олон өнцөгтийг тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваадаг, уг олон өнцөгтөд бүрэн багтдаг диагональ татаж болдог бол уг диагональ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ хувьд A_iA_{i+n} хэлбэртэй байна. Иймд A_iA_{i+n} бүр нь олон өнцөгтөд бүрэн багтдаггүй байх $A_1A_2\dots A_{2n}$ олон өнцөгт байгуулахад хангалттай.

XOy координатын хавтгай дээр $f(x)=\sqrt{x}$ функцийн графикийг зурж авч үзэд,



$i = 2, 4, \dots, 2n-2$ үед $A_i = (\frac{i}{2}, 0)$ цэгүүд ба $A_{i-1} = (\frac{i}{2}, f(\frac{i}{2}))$ цэгүүд авч үзье. Ө.х $A_2 = (1,0)$ $A_4 = (2,0) \dots A_{2n-2} = (n-1, 0)$ ба $A_1 = (1, f(1))$, $A_3 = (2, f(2)) \dots A_{2n-3} = (n-1, f(n-1))$. Мөн $A_{2n-1} = (n, f(n))$ цэг аваад, $y = f(x) = \sqrt{x}$ функцын графикт A_1 цэгт ℓ шүргэгч татъя. $f(x)$ функц гүдгэр болохыг тэмдэглэе.

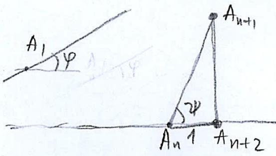
Эхлээд A_nA_{n+1} шулуун ба ℓ шулуун нь хавтгайн A_1 цэг бүхий хагаст огтлолцохыг батлъя. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ тул $f'(1) = \frac{1}{2}$ нь ℓ шулууны өнцгийн коэффициент, ө.х ℓ шулуун OX-тай φ өнцөг

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

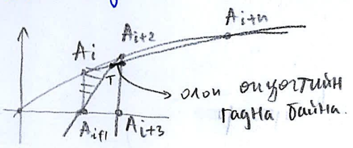
Шифр: 527 | Бодлого: A 1 | Хуудас/Нийт: 3 3

үүсгэдэг бол $\tan\varphi = \frac{1}{2}$ байна. Нөгөө талаас, A_nA_{n+1} нь OX тэй ψ өнцөг үүсгэдэг бол $\tan\psi = \frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}} = f\left(\frac{n+2}{2}\right) = \sqrt{\frac{n+2}{2}} > 1 > \frac{1}{2}$

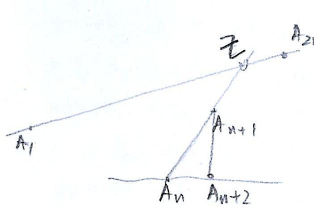


, ө.х $\tan\psi > \tan\varphi$ тул $\psi > \varphi$. Эндээс A_nA_{n+1} ба l шулуун OX шулууны A_1 цэг оршин буй талаас хавтгайд огтлолцоно гэж гарна. Уг огтлолцлын цэгийг Z гэе.

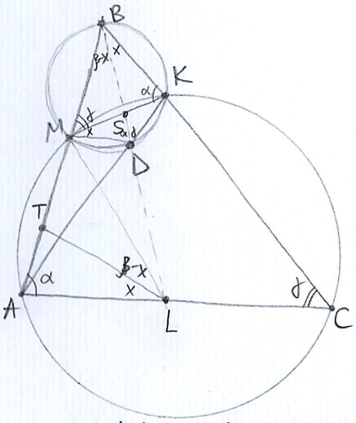
l шулуун дээр A_1A_{2n} хэрчим дотор Z цэг оршин байхаар A_{2n} цэг авъя. Одоо $A_1A_2\ldots A_{2n}$ олон өнцөгтийн $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \ldots, A_nA_{2n}$ диагоналиуд бүгд олон өнцөгт дотор бүхлээрээ багтахгүй гэж баталъя, тэгвэл уг олон өнцөгтөд бодлогын нөхцлийг хангах диагональ татах боломжгүй байна. n тэгш тул, $i=1,2,\ldots,n$ үед A_iA_{i+n} диагоналиуд нь: i тэгш ба $i<n$ бол A_iA_{i+n} нь Ox чиглэлтэй давхцах ба олон өнцөгтийн гадна байх нь ойлгомжтой; i сондгой бол A_i ба A_{i+n} нь хоёулаа $f(x)$-н график дээр орших ба f гүдгэр функц тул A_iA_{i+n} ба $A_{i+2}A_{i+3}$ хэрчмүүд огтлолцоно (f гүдгэр тул A_iA_{i+n} шулууны дээд талд нь A_{i+2} цэг оршино (учир нь A_{i+2} мөн уг график муруй дээр оршино), харин доод талд нь A_{i+3} цэг байх нь ойлгомжтой ба A_iA_{i+n} шулууны хоёр өөр талд орших цэгүүдийг холбоход огтлолцоно), иймд $A_iA_{i+n} \cap A_{i+3}A_{i+2} = T$ гэвэл T-гээс A_{i+n} чиглэлд A_iA_{i+n} хэрчмийн хангалттай бага урттай орчинд олон өнцөгтөөс гадна байна. Иймд A_iA_{i+n} нь олон өнцөгтөд бүхлээрээ багтахгүй;



$i=n$ үед A_{2n} цэгийн сонголт ёсоор A_nA_{2n} хэрчим $A_{n+1}A_{n+2}$ хэрчмийг огтолно, $A_nA_{2n} \cap A_{n+1}A_{n+2} = V$ бол A_nV хэрчим олон өнцөгтийн гадна байна. Иймд $n \geq 4$ тэгш бол дээрх $A_1A_2\ldots A_{2n}$ олон өнцөгтийн хувьд бодлогын нөхцлийг хангах диагональ татах боломжгүй.



Эндээс бодлогын нөхцлийг хангах бүх n натурал тоо нь $n=2$ гэж гарна



$\angle BAC = \alpha$ ба $\angle BCA = \gamma$ ба $\angle LBC = x$, $\angle LBA = \beta - x$ гэе, тэгвэл $\angle ABC = \beta$ болно. ACKM тойрогт багтах тул $\angle BMK = \gamma$, $\angle BKM = \alpha$, иймд $\angle BDM = \alpha$ ба $\angle BDK = \gamma$. Тэгэхээр $\angle MDL = 180° - \alpha$ ба $\angle KDL = 180° - \gamma$ тул AMDL ба CKDL тойрогт багтана. Мөн $\angle ADM = 180° - \alpha - \gamma = \beta$ юм. Иймд $\angle ALM = \angle ALT + \angle TLM = \beta$ тул $\angle TLM = \beta - \angle ALT = \beta - \angle CBL = \beta - x$ байна.

AMDL тойрогт багтах тул $\angle ALD = \angle BMD = \gamma + \angle KMD = \gamma + \angle KBD = \gamma + x$, тэгэхээр $\angle TLS = \angle ALD - x = \gamma$ болно. $\angle TMS = 180° - \angle BMK = 180° - \gamma$ учраас иймд LTMS тойрогт багтана. Иймд $\angle MST = \angle TLM = \beta - x$ болно. Нөгөө талаас, $\angle MKA = \angle MKD = \angle MBD = \beta - x$ тул эндээс $\angle MKA = \angle MST$ гэдгээс ~~ST~~ $TS \parallel AK$ гэж гарна.

$n = 2\cdot 7^{k-1}$ гэж сонгоход $7^k \mid 1+2^n+3^n$ гэж батлъя.

Эхлээд $3^n \equiv 4^n \pmod{7^k}$ гэж харуулъя. n тэгш ба $4^2 \equiv 3^2 \pmod{7}$ тул зэрэг өргөх лемма ёсоор $v_7(4^n-3^n) = v_7((4^2)^{\frac{n}{2}} - (3^2)^{\frac{n}{2}}) = v_7(4^2-3^2) + v_7(\frac{n}{2}) = 1 + v_7(7^{k-1}) = k$, ө.х $7^k \mid 4^n - 3^n$ гэж гарна. Иймд $3^n \equiv 4^n \pmod{7^k}$.

Одоо $7^k \mid 1+2^n+4^n$ гэж харуулахад хангалттай.

$1+2^n+4^n = \frac{2^{3n}-1}{2^n-1}$ болохыг тэмдэглэе. Эйлерийн теорем ёсоор, $2^{3n}-1 = 2^{6\cdot 7^{k-1}}-1 = 2^{\varphi(7^k)}-1$ нь 7^k-д хуваагдана, ө.х $7^k \mid 2^{3n}-1$ юм. Одоо $7 \nmid 2^n-1$ гэж батлахад хангалттай. $7 \mid 2^3-1$ болохыг тооцвол, $n = 2\cdot 7^{k-1}$ нь 3-д үл хуваагдах тул $n \equiv n' \pmod{3}$ энд $n' \in \{1,2\}$ гэж бичвэл $2^n-1 = (2^3)^{\frac{n-n'}{3}}\cdot 2^{n'}-1 \equiv 2^{n'}-1 \pmod{7}$ ба $2^1-1 = 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$ ба $2^2-1 = 3 \not\equiv 0 \pmod{7}$ тул $7 \nmid 2^n-1$ юм.

Өөрөөр хэлбэл, mod7-ын 2-н эрэмбэ нь 3 болохыг ашиглахад хялбар ба $3 \nmid n = 2\cdot 7^{k-1}$ тул $7 \nmid 2^n-1$ байх юм. Тэгэхээр, $7^k \mid 2^{3n}-1$ ба $7 \nmid 2^n-1$ тул $7^k \mid \frac{2^{3n}-1}{2^n-1} = 1+2^n+4^n$ болж бодлого бодогдов.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B1

Шифр: 613 Оноо: 6 Хуудас/Нийт: 1 1

Өгсөн тэнцэтгэл биш нь

$$(1-a_1a_2\dots a_n)(1+a_1+a_2+\dots+a_n)\le n \qquad (*)$$

-тэй эквивалент. $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=(1-a_1a_2\dots a_n)(1+a_1+a_2+\dots+a_n)$ гэе. Аливаа $2\le i\le n$ хувьд $f(a_1,a_2,\dots,a_n)\le f(a_1a_i,a_2,\dots,a_{i-1},1,a_{i+1},\dots,a_n)$ болохыг харуулъя, энэ нь $(1-a_1a_2\dots a_n)(1+a_1+a_2+\dots+a_n)\le$
$\le(1-a_1a_2\dots a_n)(1+a_1a_i+a_2+\dots+a_{i-1}+1+a_{i+1}+\dots+a_n)$ буюу

$1+a_1+a_2+\dots+a_n\le 1+a_1a_i+a_2+\dots+a_{i-1}+1+a_{i+1}+\dots+a_n$ буюу

$a_1+a_i\le 1+a_1a_i$ тэй эквивалент. Чингэхээр, $a_1,a_i\le 1$ тул $1+a_1a_i-(a_1+a_i)=(1-a_1)(1-a_i)\ge 0$ тул $f(a_1,a_2,\dots,a_n)\le f(a_1a_i,a_2,\dots,a_{i-1},1,a_{i+1},\dots,a_n)$ байна.

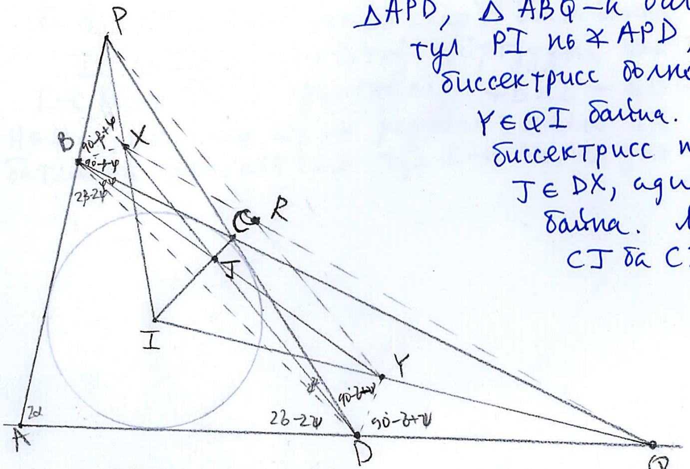
Иймээс $f(a_1,a_2,\dots,a_n)\le f(a_1a_2,1,a_3,\dots,a_n)\le f(a_1a_2a_3,1,1,a_4,\dots,a_n)\le\dots\le f(a_1a_2\dots a_{n-1},\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2},a_n)\le f(a_1a_2\dots a_n,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1})=(1-a_1a_2\dots a_n)(n+a_1a_2\dots a_n)$ болно. $x=a_1a_2\dots a_n$ гэвэл $a_1,a_2,\dots,a_n\le 1$ тул $0\le x\le 1$ ба $f(a_1,\dots,a_n)\le(1-x)(n+x)$ болно. Одоо ~~$(1-x)(n+x$~~ $(1-x)(n+x)\le n$ гэж харуулвал (*) батлагдах бөгөөд бодлого бодогдоно. $(1-x)(n+x)=n-(n-1)x-x^2\le n$ $\Leftrightarrow$ $0\le x^2+x(n-1)=x(x+n-1)$ ба $x,x+n-1\ge 0$ тул $x(x+n-1)\ge 0$ байх нь ойлгомжтой. Иймээс (*) батлагдав.

Тэнцэлдээ хүрэхийн тулд $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=f(a_1a_2\dots a_n,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1})$ ба $(1-x)(n+x)=n$ байх ёстой. $(1-x)(n+x)=n \Rightarrow 0=x(x+n-1)$ $\Rightarrow$ $x=0$ гэж гарна (~~хэрэгтэй хэдэг~~ хэрэв $n\ge 2$ бол $x+n-1\ge n-1\ge 1>0$ ба хэрэв $n=1$ бол $0=x(x+n-1)=x^2$ буюу аль ч тохиолдолд $x=0$ гэж гарна), о.х. $a_1a_2\dots a_n=0$ буюу $a_1=a_2=\dots=a_n=0$. Иймд $(a_1,a_2,\dots,a_n)=(0,0,\dots,0)$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

Эхлээд $n(P) \leq 20$ гэж харуулъя.

Үнэхээр, аливаа баганыг авч үзээд уг баганад буй хар нүднүүдийн дээрээс нь эхлэж хос хосоор нь 1 өргөнтэй тэгш өнцөгтүүдэд хийгээд байвал, уг баганад тэгш тооны хар нүд байсан бол нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгт уг баганад байхгүй, харин сондгой тооны хар нүд байсан бол нэг ш тэгш өнцөгт нэг ш хар нүд агуулна. Тэгэхээр багана бүрд ХО доо нэг ш нэгээс олонгүй хар нүд агуулах тэгш өнцөгт байх тул $n(P) \leq 20$ байна.

$\triangle BCD$-д багтсан тойргийн төв J байг.
$\triangle APD$, $\triangle ABQ$-н багтсан тойрог ω тул PI нь $\measuredangle APD$, QI нь $\measuredangle AQB$-н биссектрисс болно. Иймд $X \in PI$, $Y \in QI$ байна. Мөн $\measuredangle PDB$-н биссектрисс нь DX ба DJ тул $J \in DX$, адилхаар $J \in BY$ байна. Мөн $\measuredangle BCD$-н биссектрис CJ ба CI тул $J \in CI$.



$\measuredangle BAD = 2\alpha$, $\measuredangle ABC = 2\beta$, $\measuredangle BCD = 2\gamma$, $\measuredangle CDA = 2\delta$ ба $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$ гэе. Мөн $\measuredangle DBC = 2\varphi$, $\measuredangle BDC = 2\psi$ гэвэл $\triangle BCD$-хувьд $180° = 2\gamma+2\varphi+2\psi \Rightarrow 90° = \varphi+\psi+\gamma$ болно.

$\measuredangle IBX = \measuredangle IBD + \measuredangle DBX = \measuredangle ABD - \measuredangle ABI + \frac{1}{2}\measuredangle PBD =$
$= 2\beta - 2\varphi - \frac{1}{2}\measuredangle ABC + 90° - \frac{1}{2}\measuredangle ABD = 2\beta - 2\varphi - \beta + 90° - \frac{1}{2}(2\beta - 2\varphi)$
$= \beta - 2\varphi + 90° - \beta + \varphi = 90° - \varphi$ ба $\measuredangle IYD = 180° - \measuredangle QYD =$
$= \measuredangle YDQ + \measuredangle YQD = \frac{1}{2}(\measuredangle BDQ + \measuredangle BQD) = \frac{1}{2}(180° - \measuredangle DBQ) = 90° - \varphi$
тул $\measuredangle IBX = \measuredangle IYD$. Адилхаар $\measuredangle IXB = \measuredangle IDY$ гэж гарах тул $\triangle IBX \sim \triangle IYD$. Мөн $\triangle ABD$-н багтсан тойрог ω тул
$\measuredangle BIQ = 90° + \frac{1}{2}\measuredangle BAQ = 90° + \alpha$ ба $\measuredangle PIQ = \measuredangle PAQ + \measuredangle API + \measuredangle AQI$
$= 2\alpha + \frac{1}{2}(\measuredangle APD + \measuredangle AQB) = 2\alpha + \frac{1}{2}(180° - 2\alpha - 2\delta + 180° - 2\alpha - 2\beta) =$
$= 2\alpha + 180° - 2\alpha - \beta - \delta = 180° - \beta - \delta = \alpha + \gamma$ тул $\measuredangle BIX = \measuredangle YID =$
$= 90° - \gamma$ болно. Мөн $\measuredangle BJX = 180° - \measuredangle BJD = 180° - (90° + \frac{\measuredangle BCD}{2}) =$
$= 90° - \gamma$ тул $BXJI$ тойрогт багтана, адилхаар $IJYD$ тойрогт багтана. Мөн $\triangle IBX \sim \triangle IYD$ тул I нь $BX \xrightarrow{I} YD$ байх T спирал төсөөний төв болно.

$\measuredangle CDY = \measuredangle BDY - 2\psi = \frac{1}{2}\measuredangle BDQ - 2\psi = \frac{1}{2}(180° - \measuredangle BDA) - 2\psi =$
$= 90° - (\delta - \psi) - 2\psi = 90° - \delta - \psi$ ба $\measuredangle YDQ = \frac{1}{2}\measuredangle BDQ = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle BDA = 90° - \delta + \psi$
Адилхаар $\measuredangle PBX = 90° - \beta + \varphi$ ба $\measuredangle CBX = 90° - \beta - \varphi$ болно.

Мөн $\angle PIC = \angle XIC = \cancel{\angle XB}\ \angle XIJ = \angle XBJ = \varphi + 90^\circ - \beta - \varphi = 90^\circ - \beta$ ба $\angle QIC = 90^\circ - \beta$ (адилхаар) болж байна.

IB ба ID диаметртэй тойргуудын харгалзан ω_B, ω_D гэе. I-с BC-д $IH \perp$ буулгавал $\angle BHI = \angle DHI = 90^\circ$ тул $H \in \omega_B$, $H \in \omega_D$, ө.х ω_B, ω_D-н радикал тэнхлэг IH. Бид $R \in IH$ гэж батлахад хангалттай тул R-н ω_B, ω_D дээх зэрэг тэнц