2n оройтой олон өнцөгт.

1). n – сондгой үед

олон өнцөгтөө яг зурагдах оройн дараалаар нь $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_n$ гэж тэмдэглэе. (аль ч орой нь яг хөрш биш хоёр оройтойгоо л холбогдсон бүрэн олон өнцөгтийн 1 талыг үүсгэнэ.)

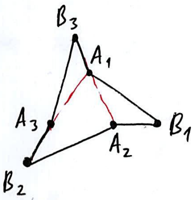
$A_1A_2\dots A_n$ дүрс нь зөв n өнцөгт

$B_1B_2\dots B_n$ дүрс нь зөв n өнцөгт

Энд $(\forall k:)$ A_k, $B_{k+\frac{n-1}{2}}$, $A_{k+\frac{n+1}{2}}$ дүрсүүдтай 3 орой нь 1 шулуун дээр оршдог байхаар авна. (A_t гэвэл $t>n$ бол үүнийг A_{t-n} гэж ойлгоно.)

(B-н хувьд адил).

n=3 үед зурвал

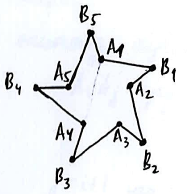


A_1, B_2, A_3 – 1 шулуун

A_2, B_3, A_1 – 1 шулуун

A_3, B_1, A_2 – 1 шулуун.

n=5 үед зурвал



A_1, B_3, A_4

A_2, B_4, A_5

A_3, B_5, A_1 – 1 шулуун.

A_4, B_1, A_2

A_5, B_2, A_3

Дээрх зарчмаар зурагдах 2n олон өнцөгтийг авч үзье.

Энэ олон өнцөгтийг тэнцүү оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваах чадах диагональ олддог гэе. B_iB_j, A_iA_j, B_iA_j хэлбэртэй байна. Тэрхүү диагональ нь

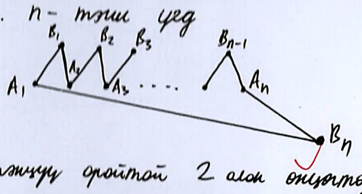
B_iB_j үед: B_iB_j ~~[illegible]~~ хэрчим дээр ямар ч A_e цэг оршихгүй байхаар $B_1,\dots,B_n$ цэгүүдээ сонгож чадна. (A_k, $B_{k+\frac{n-1}{2}}$, $A_{k+\frac{n+1}{2}}$ цэгүүд л 1 шулуун дээр оршиж хэрэгтэй тул B цэгүүдээ маш алсад сонгож чадна).

Тэгэхээр B_iB_j нь бүтнээрээ оршиж чаддаг бол $B_iA_{i+1}B_{i+1}\dots A_jB_j$, $B_jA_{j+1}B_{j+1}\dots A_iB_i$ гэж 2 олон өнцөгтөд хуваана. 1 нь $2k+1$ оройтой гэвэл $2k+1+2k+1=4k+2$ B_i, B_j цэгүүдийн давхцлыг хасвал $4k$ орой болно. Гэвч $2n$ орой n нь сондгой тул зөрчил үүснэ.

- A_iA_j үед B_iB_j-тэй яг адилаар тэгш, сондгойн зөрчил гарна.
(A_iA_j хэрчим дээр өөр ямар ч орой оршихгүй нь тодорхой).
- B_iA_j үед $j \neq i+\frac{n-1}{2}$ үед B_iA_j хэрчим дээр өөр ямар ч орой оршихгүй байхаар оройнуудаа тэгдэлж олон өнцөгтөө зурж чадна. B_iA_j диагоналиараа олон өнцөгтө хуваая.

$B_iA_{i+1}B_{i+1}\dots A_j$ (1 олон өнцөгт нь)
$A_jB_jA_{j+1}\dots A_iB_i$ (1 олон өнцөгт нь).
Энд 1 олон өнцөгт нь $\frac{2n+2}{2}=n+1$ оройтой байна. Үүнээс $j=i+\frac{n-1}{2}$ болно.
Гэвч $A_i, B_{i+\frac{n-1}{2}}, A_{i+\frac{n+1}{2}}$ буюу A_i, B_j, A_{j+1} — 1 шулуун дээр оршино.
Тэгэхээр 2 олон өнцөгт нь $n, n+1$ оройнуудтай байж зөрчил үүснэ.

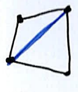
2). n - тэгш үед

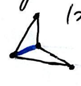


ийм $2n$ өнцөгтийг авч үзье.
$A_1, A_2, \dots, A_n$ — 1 шулуун
$B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ — 1 шулуун.

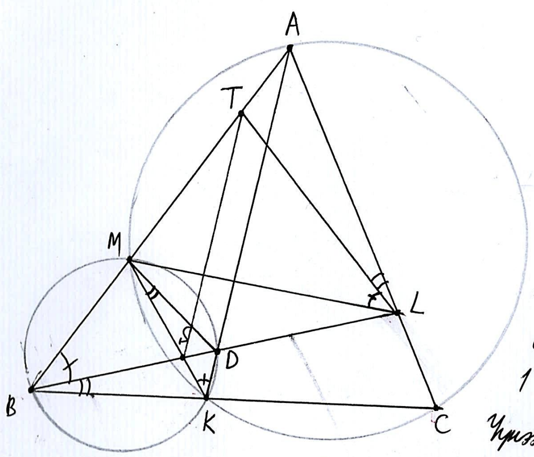
тэнцүү оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваах болдог диагональ олддог гэе. (бүтнээрээ оршино).
Тэрхүү диагональ нь — A_iA_j үед $j=i+1$ байхаас өөр аргагүй.
Учир нь $j \geq i+2$ бол $A_1, \dots, A_n$ - 1 шулуун дээр орших тул 2-с их дүрсэд хуваана.
$j=i+1$ үед 3, 3 оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваана $\Rightarrow \underline{2n=4}$
- A_iB_j үед $j=i$ эсвэл $j=i-1$ байж болохгүй нь ойлгомжтой.
Учир нь энэ үед A_iB_j нь олон өнцөгтийн тал болно.
$j \neq n$ үед A_iB_j нь бүхлээрээ олон өнцөгт дотор оршихгүй. (Зургаас ойлгомжтой)
Үүнээс $j=n$ ба A_iB_n - диагональ. $A_iB_iA_{i+1}\dots A_nB_n$, $B_nA_1B_1\dots A_{i-1}B_{i-1}A_i$ гэж 2 олон өнцөгт.
1 нь $2k$ оройтой гэвэл $2k+2k=4k$ A_i, B_n-н давхцлыг хасвал $4k-2$ оройтой байж n-тэгш гэдэгт зөрчинө.
$4k-2=2(2k-1)$ сондгой.
- B_iB_j үед (энэ нь олон өнцөгт дотор оршихгүй нь ойлгомжтой)

Үүнээс $2n \neq 4$ үед бодлогын нөхцлийг хангахгүй. $2n=4$ буюу $n=2$ үед тэнцүү оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваах, бүхлээрээ багтдаг диагональ олдоно.


(гүдгэр үед)


(хотгор үед).

Хариу: $n=2$ гэж ганц шийдтэй.



$\angle ALT = \angle CBL$ гэж өгөгдсөн.

M, B, K, D – 1 тойрог дээр орших тул $\angle MBD = \angle MKD$

A, M, K, C – 1 тойрог дээр орших тул $\angle MKA = \angle MCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MBL = \angle MKA = \angle MCA$

буюу $\angle MBL = \angle MCL$ тул M, B, C, L нь 1 тойрог дээр оршино.

Үүнээс $\angle MBC = 180^\circ - \angle MLC = \angle MLA$

$\angle MBC = \angle MBL + \angle LBC = \angle MLA = \angle MLT + \angle ALT \Rightarrow \angle MBL = \angle MLT$

B, M, D, K – 1 тойрог дээр орших тул $\angle AMD = \angle BKD$

M, K, C, A – 1 тойрог дээр орших тул $\angle BMK = \angle KCA$

$$\angle BMK = \angle BDK$$

$\Rightarrow \angle BDK = \angle KCL$ тул D, K, C, L – 1 тойрог дээр оршино.

Үүнээс $\angle BKD = \angle BLC = \angle AMD$.

$\angle TLD + \angle TMS = \angle TLD + \angle AMD + \angle KMD = \angle TLD + \angle BLC + \angle ALT = 180^\circ$

$\Rightarrow T, M, S, L$ – 1 тойрог дээр оршино. $\Rightarrow \angle TSM = \angle TLM \Rightarrow \angle TSM = \angle AKM$

буюу $TS \parallel AK$ болж батлагдав.

$\forall k \in \mathbb{N}: \quad 7^k \mid 1^n + 2^n + 3^n \quad \exists n.$

Лемм. $a \equiv b\,(7^k)$ бол $a^7 \equiv b^7\,(7^{k+1})$ байна.

Баталгаа. $a - b \equiv 0\,(7^k) \Rightarrow a \equiv b\,(7)$ гэж байна.

$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

$a - b \equiv 0\,(7^k)$ тул 2 дахь хаалтан дахь тоог 7-т хуваагдахыг батлахад хангалттай. $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6 \underset{(a \equiv b(7))}{\equiv} 7 \cdot b^6 \equiv 0\,(7)$.

Иймээс лемм батлагдав▲

Лемм-с ерөнхий тохиолдолд $a \equiv b(7)$ бол $a^{7^{k-1}} \equiv b^{7^{k-1}}\,(7^k)$ гэж гарна

Одоо бодлого руугаа $n = 3 \cdot 7^{k-1} + 1$ гэж авъя.

$2^n = 2^{3 \cdot 7^{k-1} + 1}$ $\quad 2^3 \equiv 1\,(7)$ тул лемм-с $2^{3 \cdot 7^{k-1}} \equiv 1\,(7^k)$ гэж гарна.

$2^n = 2^{3 \cdot 7^{k-1} + 1} \equiv 2\,(7^k)$

$3^3 \equiv -1\,(7)$ тул лемм-с $3^{3 \cdot 7^{k-1}} \equiv (-1)^{7^{k-1}} = -1\,(7^k)$ гэж гарна.

$3^n = 3^{3 \cdot 7^{k-1} + 1} \equiv -3\,(7^k)$

Иймээс $1 + 2^n + 3^n \equiv 0\,(7^k)$ болж бодлого батлагдав▲

$n = 3 \cdot 7^{k-1} + 1$ үед $7^k \mid 1 + 2^n + 3^n$

$k = 1$ үед $n = 4$ $\quad 7 \mid 1 + 2^4 + 3^4 = 98$

$k = 2$ үед $n = 22$ $\quad 49 \mid 1 + 2^{22} + 3^{22}$ $\quad 2^{22} \equiv 15^3 \cdot 16 \equiv 29 \cdot 44 \equiv 2\,(49)$

$3^{22} \equiv 2^4 \cdot 9 \equiv 46\,(49)$.

$\vdots$

$0 \le a_1, \dots, a_n \le 1$

(1). $\frac{1-a_1a_2\cdots a_n}{n} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \Rightarrow (1+a_1+\dots+a_n)(1-a_1\dots a_n) \le n$ гэж батлахад болно.

$1+a_1+\dots+a_n-(1+a_1+\dots+a_n)a_1\dots a_n \le n$

$a_1+\dots+a_n \le n-1+(1+a_1+\dots+a_n)a_1\dots a_n$

Хэрэв $a_1+\dots+a_n\le n-1$ бол $(1+a_1+\dots+a_n)a_1\dots a_n \ge 0$ тул шууд гарна.

Үүнээс $a_1+\dots+a_n \ge n-1$ гэж үзье.

Тэгвэл $(1+a_1+\dots+a_n)a_1\dots a_n \ge n\cdot a_1\dots a_n$ байна. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_1+\dots+a_n\le n-1+na_1\dots a_n$ (2) гэж батлахад хангалттай.

$n=1$ үед (1) маань шууд гарна. $1-a_1 \le \frac{1}{1+a_1} \Rightarrow 1-a_1^2\le 1$ ✓

Үүнээс $n\ge 2$ гэж үзье. Индукц ашиглая.

$n=2$ үед (2) нь $a_1+a_2\le 1+2a_1a_2 \Rightarrow 0\le a_1a_2+(1-a_1)(1-a_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1a_2\ge 0$

$(1-a_1)(1-a_2)\ge 0$ тул дээрх тэнцэтгэл биш нь үнэн.

$n=n$ үед $a_1+\dots+a_n \le n-1+na_1\dots a_n$ (3) байдаг гэе.

$n=n+1$ үед $a_1+\dots+a_{n+1}\le n+(n+1)a_1\dots a_{n+1}$ (4) гэж батлахад болно.

$a_1+\dots+a_{n+1}\ge n$ тул $a_1+\dots+a_n\ge n-1$ байна ($a_{n+1}\le 1$).

Үүнээс (4) дээрх $a_1,\dots,a_n$-н оронд (3) дээрх $a_1,\dots,a_n$-г орлуулж болно. Тэгээд (4)-с (3)-г хасъя.

$a_{n+1}\le 1+a_1\dots a_n((n+1)a_{n+1}-n)$ гэж батлахад шилжилт батлагдана.

$\Downarrow$

$a_{n+1}-1 \le a_1\dots a_n((n+1)a_{n+1}-(n+1)) + a_1\dots a_n$

$\parallel$

$a_1\dots a_n(a_{n+1}-1)(n+1)+a_1\dots a_n$

$\Downarrow$

$(a_{n+1}-1)(1-a_1\dots a_n(n+1)) \le a_1\dots a_n$

$a_{n+1} \le 1$ тул $a_{n+1} - 1 \le 0$.

Хэрэв $1 - a_1 \dots a_n(n+1) \le 0$ бол $1 \le a_1 \dots a_n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le a_1 \dots a_n$

Батлах гэж буй (4) нь $a_1 + \dots + a_{n+1} \le n + (n+1) a_1 \dots a_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n + (n+1)a_1 \dots a_{n+1} \ge n + a_{n+1} \Rightarrow a_1 + \dots + a_{n+1} \le n + a_{n+1}$ буюу

$a_1 + \dots + a_n \le n$ гэж батлах байна. Энэ нь $\forall i: a_i \le 1$ гэдгээс шууд

гарна. Үүнээс $1 - a_1 \dots a_n(n+1) \ge 0$.

Тэгэхээр $a_{n+1} - 1 \le 0$

$1 - a_1 \dots a_n(n+1) \ge 0 \quad \Rightarrow (a_{n+1} - 1)(1 - a_1 \dots a_n(n+1)) \le 0$ байна.

$a_1 \dots a_n \ge 0$ байх нь ойлгомжтой тул

$(a_{n+1} - 1)(1 - a_1 \dots a_n(n+1)) \le a_1 \dots a_n$ болж индукцийн шилжилт батлагдав.

Үүнээс $a_1 + \dots + a_n \le n - 1 + (1 + a_1 + \dots + a_n) a_1 \dots a_n$ нь үнэн болж

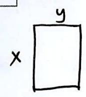
$(1 + a_1 + \dots + a_n)(1 - a_1 \dots a_n) \le n$ ♠

Тэнцэдээ хүрэх нөхцөл нь $a_i = 0$ байх $\exists i$. $\Rightarrow a_1 = 0$ гэе.

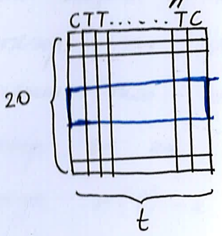
$\frac{1}{n} \le \frac{1}{1 + a_2 + \dots + a_n} \qquad 1 + a_2 + \dots + a_n \le n$

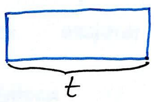
$1 + a_2 + \dots + a_n = n \Rightarrow a_2 = \dots = a_n = 1$.

(аль 1 нь 0-тэй, бусад нь 1-тэй тэнцүү).

20×20 хүснэгт. 

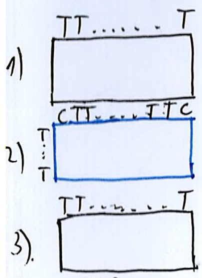
үүний $x \times y$ хүснэгт гэе.

20×20 хүснэгтээ эхлээд нь 20×1-үүдэд хуваая. (20 ширхэг).
Дараа нь 20 ширхэг 20×1-үүдийнхээ чанх дээр нь тэдгээрт байгаа хар өнгөөр будагдсан нүднүүдийн тоо тэгш үү, сондгой юу гэдгийг тэмдэглэе. Товчоор T-тэгш C-сондгой гэе.
Ядаж нэг будагдсан нүдтэй мөн T будагдсан нүдтэй 20×1-г хуваалтын дүрс бүрт яг 2 будагдсан нүд байхаар бүрэн хувааж чадна. Учир нь будагдсан нүднүүд $x_1, \dots, x_{2k}$-р мөрнүүд дээр байгаа гээд үзэж болно. Тэгвэл 20×1 дүрсээ $x_2 \times 1$, $(x_4 - x_2) \times 1$, …, $(x_{2k} - x_{2k-2}) \times 1$ гэж k ширхэг тэгш онцогтод хуваахад тэгш онцот бүрт яг 2 хар нүд оршино. ($x_1 < x_2 < \dots < x_{2k}$).
Одоо 

бүлэг дээр нь C, T, T, …, T, C гэж бичигдсэн хэсэг буюу дараалсан хоёр C-г авч үзье.
Үүнд орших 

хүснэгт бүрийг авч үзэхэд 

20×t дүрс нь дараах 3 хэсэгт хуваагдана.



1, 3-р дүрсийг тэгшүүдийнх нь хувьд яг 2 хар нүдтэй байхаар хувааж чадна (баганууд тэгш)
2-р дүрсийг мөрийн тэгшүүдийн хувьд яг 2 хар нүдтэй байхаар хувааж чадна.
Энд T нь хоосон бол нөөц үүсгэжгүй.

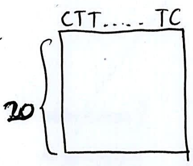
байхаар хуваахад болно.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 6 1 5 Бодлого: B 2 Хуудас/Нийт: 2 2

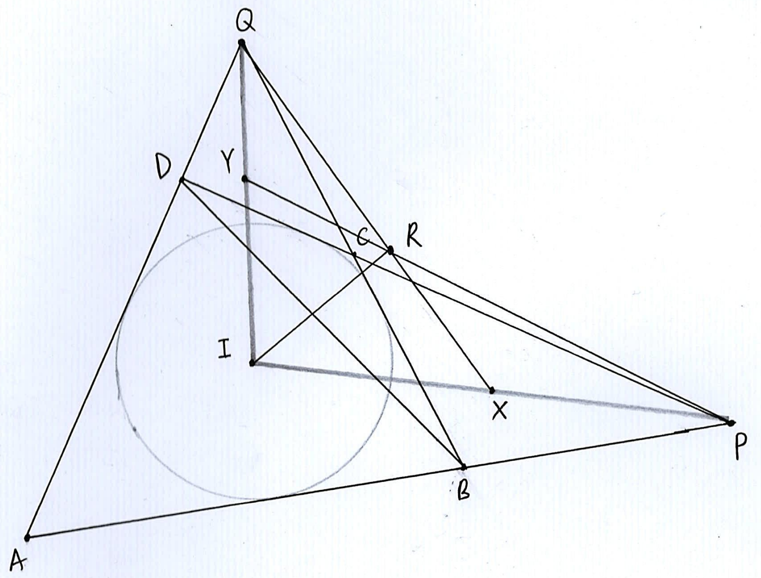
Иймээс дараалсан хоёр C бүрийн хооронд орших



хүснэгтийг хуваалт тэгш өнцөгт бүрт яг 2 хар нүд байхаар хуваах чадна.

Дээр C гэж бичигдсэн баганын тоо тэгш бол дараалаад нь 2,2-оор нь дээрх шиг аваад хуваалт бүрт яг 2 хар нүд байхаар хуваах чадна. Харин C гэж бичигдсэн баганын тоо сондгой бол 2,2-оор нь дараалуулж аваад хуваасаар эцэст нь ганц C гэж багана үлдэнэ. Энэ баганын хар нүд орших мөрүүдийн дугаар $x_1,\dots,x_{2k+1}$ гэвэл $x_2\times1$, $(x_4-x_2)\times1,\dots,(x_{2k}-x_{2k-2})\times1$ гэж хуваагаад ганц тэгш өнцөгт x_{2k+1} гэж ганц хар нүдтэй ~~[illegible]~~ оршино.
Тэгэхээр энэ үед нийт хар нүдний тоо нь C гэж бичигдсэн баганын тоо сондгой тул нийт сондгой хар нүд байна.
Тэгэхээр яг нэг хар нүдтэй тэгш өнцөгт заавал олдоно.
Иймээс $n(P)$-н хамгийн их утга нь 1.

Хариу: 1.


Q
D
Y
C
R
I
X
P
B
A