Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 5 3 1 Бодлого: A 1 7 оноо Хуудас/Нийт: 1 2

Оройнуудаа дараалаарнь дугаарлая

i болон $i+k$-г холбосон диагональ нэхцэл хангана гэе

$\Rightarrow$ i $i+1$ $i+2$ ... $i+k$ $\Rightarrow$ $k+1$ оройт

$i+k$ $i+k+1$ ... $2n$ 1 2 .. i $\Rightarrow$ $2n-i-k+1+i$ оройт

$k+1 = 2n-k+1$

$k = n$ болно

$\Rightarrow$ Нөхцөл хангах диагональ нь тэгш зөрүүтэй 2 оройг холбох ёстой

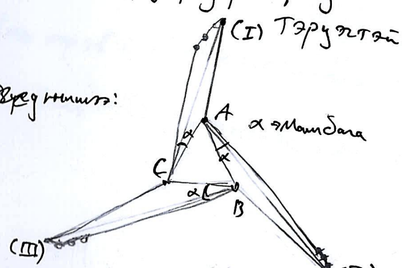
$n \geq 3$ үед Ядаж 6 оройтой бий.

Зөв давъя. Тал бүр дээр дараах үйлдлийг хийе: Хангалттай бага ~~хэмжээ~~ өнцөг үүсгэхээр хөлүүл авъя.

(I) Тэрүүнтэй ойролцоо хавьд ~~$\frac{2n-3}{3}$~~ $\frac{2n-3}{3} \pm \frac{2}{3}$ ~~$\frac{2n-3}{3}$~~ хоорондох утгатай тавъя.

Талтайгаа олон өнцөгт үүсгэе

$\Rightarrow$ ~~$k\geq 3$~~ үед нийтээ:



~~Хэрэв~~

Хэрэв α гаа маш бага авч чадсан бол монотонуудыг холбох хэдий I үзүүд нь зөвхөн I ба A ба C үзүүдтэй л диагональ үүсгэж чадна (Өөр үзүүртэй ~~холбо~~ диагональ үүсгэвэл олон өнцөгтдөө багтахгүй)

Гэтэл I үзүүр ба A ба C ын нийт үзүүрийн тоо $\sim \frac{2n}{3}$ тул n ын зөрүүтэй үзүүр байхгүй

II III дээр мөн адил.

AB C хоорондоо диагональ үүсгэнэ гэвэл AB-г үзье тэр 2ын хооронд (II) үзүүд байгаа зөрүүнь $\sim \frac{2n}{3}$ тул мөн n ын зөрүүтэй байж чадахгүй.

$\Rightarrow$ Диагональ олдохгүй

$\Rightarrow$

(I)(II)(III) тус бүрийн үзүүрийн тоо ~~өөрсдөө~~ ойрхон байх туслам ~~б~~ аминтай

Бид хэдэн хамгийн их зөрүү 1 байхаар хуваарилж чадна.

Зуулангийн нь ~~тэнцүү~~ $\left[\frac{n}{3}\right]$ байлгаад үлдсэнд үзүүдэй 1, 1 ээр нь тараахад ихдээ зөрүү 1 байна.

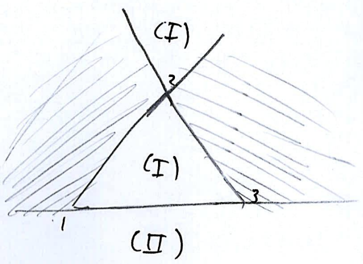
$n = 2$ үед болох баталгаа:

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 5 3 1 | Бодлого: A 1 | Хуудас/Нийт: 2 2

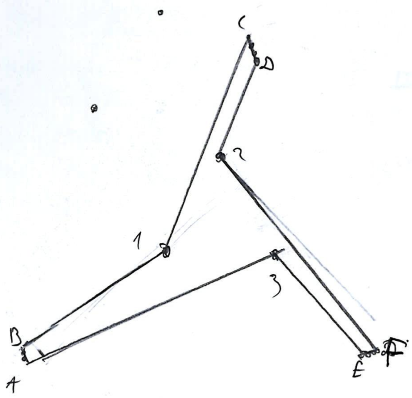
1 2 3 дараалсан цэгүүдийг авч үзье



12 ба 34 огтлолцохгүй
23 ба 14 огтлолцохгүй
⇒ 4 нь байж болохгүй хэсгийг тодруулав
Үлдсэн хэсгээ (I) ба (II) хэсэгт хуваав

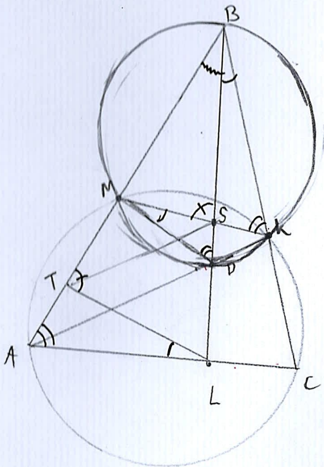
4 нь хэрэв (II) хэсэгт байгаа бол 13 диагональ нь 123 ба 143 гэж 2 од хуваана
4 нь (I) хэсэгт байгаа бол 24 диагональ нь 214 ба 234 гэж 2 од хуваана
→ $n = 2$ үед л майт хадна.

A₁ $n \geq 3$ үед бас 1 болохыг байгуулалт



AB ; CD ; ~~DE~~ FE дээр $\left[\frac{2n-3}{3}\right]$ цэгүүдийг
Тус тусдаа хүссэн аргаараа байрлуулж болно
Үлдэх байрлуулаагүй цэгүүдийг 1 1 ээр
нь тэр: AB ; CD ; FE дээр тараан байрлуулна.

Өмнөхтэй адил дүрмээр диагональ олдохгүй



BMDK тойрогт оршино.

~~∡ALT~~

$\angle ALT = \angle CBL = \angle KBD = \angle KMD = \angle SMD$

$\angle TAL = \angle MAC = 180^\circ - \angle MKC = \angle MKB = \angle MDB = \angle MDS$

$\angle ALT = \angle DMS$

$\angle TAL = \angle SDM$ $\Big| \Rightarrow ALT \sim DMS$ болно.

$\angle MTL = 180 - \angle ATL = 180 - \angle DSM = 180 - \angle LSM = \angle MSB$

~~⇒TMSL~~ 4 цэгт ~~тойрогт батлагдана~~.

~~∠TMSL 4 цэгт тойрогт баталсан тул~~

$\Rightarrow \angle MSB = \angle LTB$

$\angle MBS = \angle LBT$ $\Big| \Rightarrow MSB \sim LTB$ болно.

$\Rightarrow \frac{LT}{TB} = \frac{MS}{SB} \Rightarrow \frac{LT}{MS} = \frac{BT}{BS}$

$ALT \sim DMS$ тул $\frac{LT}{MS} = \frac{AT}{DS}$

$\Rightarrow \frac{AT}{DS} = \frac{BT}{BS} \Rightarrow \frac{BT}{BS} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow TS \parallel AD$

$TS \parallel AK$ болж батлагдав ▲

Индукц хэрэглэе. $k=1$ үед $1^2+2^2+3^2=14 \vdots 7^1$ сууриуцин

$1^n+2^n+3^n \equiv 0 \ (7^k)$ гэвэд 7^{k+1} д хуваагдах n тоо олдоноогэжсбатлая

$1^{n+i\varphi(7^{k})}+2^{n+i\varphi(7^{k})}+3^{n+i\varphi(7^{k})}$ тоог авч үзье

$1^n \equiv 1 \ (7^{k+1})$

$2^n \equiv t_1 \ (7^{k+1})$

$3^n \equiv t_2 \ (7^{k+1})$ гэе.

$2^{\varphi(7^k)} \equiv 1 \ (7^k) \Rightarrow 2^{\varphi(7^k)} \equiv c_1 \cdot 7^k+1 \ (7^{k+1})$.

$3^{\varphi(7^k)} \equiv 1 \ (7^k) \Rightarrow 3^{\varphi(7^k)} \equiv c_2 \cdot 7^k+1 \ (7^{k+1})$ гэе.

$1^{n+i\varphi(7^k)}+2^{n+i\varphi(7^k)}+3^{n+i\varphi(7^k)} \equiv$

$\equiv 1+t_1 \cdot (c_1 \cdot 7^k+1)^i+t_2 \cdot (c_2 \cdot 7^k+1)^i \quad (7^{k+1})$

$k \geq 1$ тул $2k \geq k+1 \Rightarrow 7^k$ олон орсон зэрэгүүд хэрэггүй $\Rightarrow$

$\equiv 1+t_1 \cdot c_1 \cdot 7^k \cdot i+t_1+t_2 \cdot c_2 \cdot 7^k \cdot i+t_2 \quad (7^{k+1})$

$\equiv \underbrace{1+t_1+t_2}_{\vdots 7^k}+7^k \cdot i \cdot (c_1t_1+c_2t_2) \quad (7^{k+1})$ байх i-г оршиноогэж харуулахад хангалттай

$(1+t_1+t_2) : 7^k = r$ гэе.

$r \cdot 7^k+7^k \cdot i(c_1t_1+c_2t_2) \equiv 0 \ (7^{k+1})$

$r+(c_1t_1+c_2t_2) \cdot i \equiv 0 \ (7)$

$\Rightarrow c_1t_1+c_2t_2 \not\vdots 7$ үед $i \equiv -r \cdot (c_1t_1+c_2t_2)^{-1} \ (7)$ байхад болно.

$\Rightarrow c_1t_1+c_2t_2 \not\vdots 7$ гэжсбатлахад хангалттай

$a_1 a_2 \dots a_n = p$ гэе $\quad 0 \le p \le 1$

$$\frac{1 - a_1 \dots a_n}{n} \le \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n}$$

$$\frac{1-p}{n} \le \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \quad \triangle$$ гэж батлана

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ~~их байх~~ ын хамгийн их утгыг олъё

Хамгийн их байх үед $a_1 = b_1$

$a_2 = b_2$

$\vdots$

$a_n = b_n$ байг

$b_i \ne 1$ $b_j \ne 1$ байх $i \ne j$ олддог гэж үзье

$b_i \cdot b_j = 1 \cdot b_i b_j$

$\cancel{b_i + b_j}$ $\quad (1 - b_i)(1 - b_j) \ge 0$ тул

$1 + b_i b_j \ge b_i + b_j$ байна

$0 \le b_i\, b_j \le 1$ нөхцөл хангана

$\{b_i; b_j\}$ оронд $\{1; b_i b_j\}$ байвал нийлбэрийн ихэснэ
зөрчил

$\Rightarrow$ $b_i \ne 1$ $b_j \ne 1$ байх $i \ne j$ олдохгүй

$\Rightarrow$ ядаж $n-1$ нь 1 байна

үлдсэн 1 гишүүн нь $p : 1^{n-1} = p$ болно

$$\Sigma_{max} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1} + p = p + n - 1$$

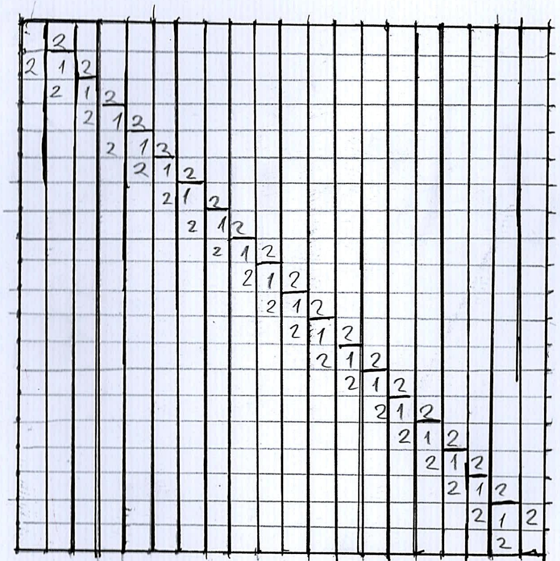
$$\frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \ge \frac{1}{1 + p + n - 1} = \frac{1}{p+n} = \frac{1}{p+n} - \frac{1-p}{n} + \frac{1-p}{n} = \frac{-(1-p)(p+n) + n}{(p+n)n} + \frac{1-p}{n} = \frac{1-p}{n} + \frac{n - n - p + p^2 + pn}{(p+n)n}$$

$$= \frac{1-p}{n} + \frac{pn + p^2 - p}{(p+n)n} = \frac{1-p}{n} + \frac{p(n+p-1)}{(p+n)n} \ge \frac{1-p}{n} \quad \blacktriangle$$

$\Downarrow$

$p \ge 0$ ба $n \ge 1$ тул $p \ge 0; n + p - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{p(n+p-1)}{p+n} \ge 0$

Тэнцэх нөхцөл $p = 0$ ба нийлбэр их байна $\Rightarrow$ $\{a_1 \dots a_n\} = \{0; 1; 1; \dots; 1\}$ байдалтай үед тэнцэнэ



$n(P)=20$ байх байгуулалт

Ядаж 20 гэж баталъя:

~~Дар~~ Хүснэгтэд будагдсан нүднүүдийг 1 ба 2 оор ангилав.

$1 \to 18$ш

$2 \to 38$ш

2ш ижил ангийн нүд 1 тэгш өнцөгтөд орох гэвэл өөр 1 ангийн нүд мөн тэр тэгш өнцөгтөд агуулагдана. $\Rightarrow$ ядаж 3 хар нүд болж зөрчигдөнө.

$\Rightarrow$ Зөвхөн 1 ба 2 ангилал 1; 1 байх хоёр харгалзах тэгш өнцөгт олдоно.

1 ба 2 уудын хосболгоод зөрүүчь $|21-11|=20$ тул аль нэг 20ш 2 р ангиллын нүд нь ганцаараа тэгш өнцөгтөд орно

$\Rightarrow n(P)\geq 20.$

Ямар ч будалтын 20дд $n(P)\leq 20$ байхаар ~~хуваа~~ хувааж чадна гэж баталъя.

~~1 мөрийг авч үзье харнүдгүй бол бүх нь 1×20 ⇒ 1ш т.ө~~

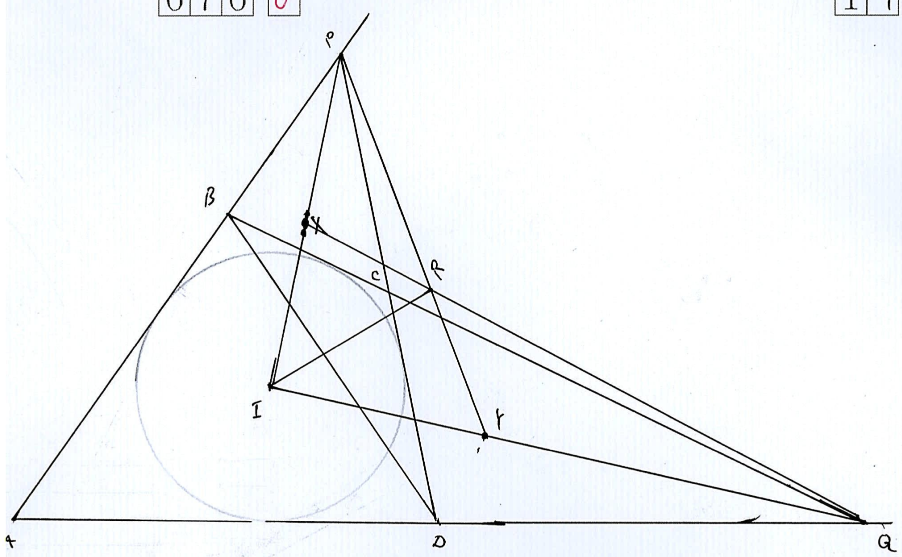
1×~~20~~20ыг авч үзье ~~тэгш~~ харнүдний тоо ≤1 ~~харнүдгүй~~ бол бүхнээрээ 1×20 ⇒ 1ш т.ө

~~Харнүд~~ Тэгш бол ≥1 эхний 2 хар нүдийг агуулах хамгийн том т.ө үлдсэнээс нь дараагийн 2 хар нүдийг агуулах хамгийн том т.ө гэх мэтчилэн явсаар ≤1 агуулах т.ө 0 байна.

Сондгой үед 1 харнүдүүдтэл нь тэгш дээрх тохиолдлыг авч сүүлд үлдсэн т.ө бүхлээ байна. сүүлийн л т.ө ≤1 харнүд агуулна ⇒ 1

$\Rightarrow$ 1×20 ыг 1 байхаар авч чадна.

20×20 оо 20 мөр болгож мөр бүртийгээ 1 байхаар хувааж чадна $\Rightarrow 1\cdot 20=20$ их дээ 20 байхаар хувааж чадна.



$PBD\triangle$-д багтсан тойргийн төв $\angle BPD$-ын биссектрис болох PI дээр оршино $\Rightarrow X \in PI$

Мөн адилаар $Y \in QI$ $\qquad r(ABC)$ гэж $ABC\triangle$-д багтсан тойргийн радиусыг тэмдэглэе

$$\frac{QY}{QI} = \frac{r(BDQ)}{r(\omega)} \quad (\text{Учир нь } \angle AQB \text{ дотор оршиж буй}) \qquad r(ABC) = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{P_{ABC}}$$

S → Талбай

P → Периметр

$$= \frac{S_{BDQ}}{P_{BDQ}} \cdot \frac{P_{ABQ}}{S_{ABQ}} = \frac{S_{BDQ}}{S_{ABQ}} \cdot \frac{P_{ABQ}}{P_{DBQ}} = \frac{QD}{QA} \cdot \frac{P_{ABQ}}{P_{DBQ}}$$

Мөн адилаар $\dfrac{PX}{PI} = \dfrac{PB}{PA} \cdot \dfrac{P_{ADP}}{P_{DBP}}$

$\angle APD = 2\alpha \qquad \angle AQB = 2\beta \quad \angle BAD = 2\gamma$ гэе

$$\angle ABI = \frac{\angle ABQ}{2} = \frac{180 - \angle BAQ - \angle AQB}{2} = 90 - \beta - \gamma$$

$$\angle API = \frac{\angle APD}{2} = \alpha \Rightarrow \angle BIP = \angle ABI - \angle API = 90 - \alpha - \beta - \gamma$$

Мөн адилаар $\angle DIY = 90 - \alpha - \beta - \gamma$

$\angle BIP = \angle DIY$