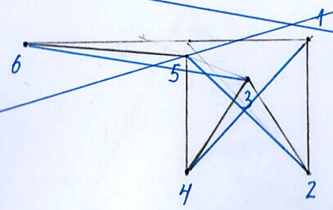
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A1

Шифр: 543 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 2

~~n=3 үед~~ ~~Олон өнцөгтийн оройнуудаа 1,2,3,... 2n гэж дугаарлая.~~

~~n=3 үед~~

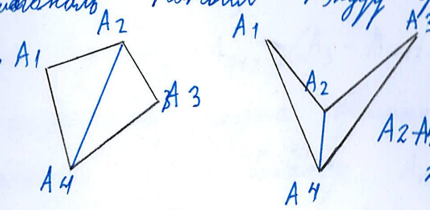


~~бол 3-6, 1-4, 2-5 нь олон өнцөгтийн гадна оршино.~~

Эхлээд олон өнцөгтийн оройнуудаа $A_1A_2,A_3,\ldots A_{2n}$ гэж дэс дараалан дугаарлая. Тэгвэл A_k-оройг $A(n+k)$ оройтой холбовол $(k<n)$

$A_k, A(k+1), A(k+2),\ldots A(k+n)$; $A_kA(k-1),\ldots, A(1)A_{2n},\ldots A(n+k)$ n+1 оройтой 2 олон өнцөгт үүснэ. Тэгээд A_k, A_l-оройг холбосон диагоналыг A_k-A_l гэж тэмдэглэе. Тэгвэл бид $A_1-A(n+1), A_2-A(n+2),\ldots A_n-A(2n)$ гэх диагональ татвал тэнцүү оройтой олон өнцөгт үүснэ.

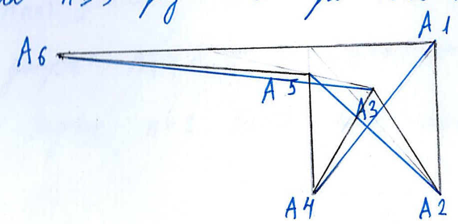
n=2 үед



гэж 2 хон хэлбэр байна. A2-A4 татвал хоёр гурвалжинд хуваагдана.

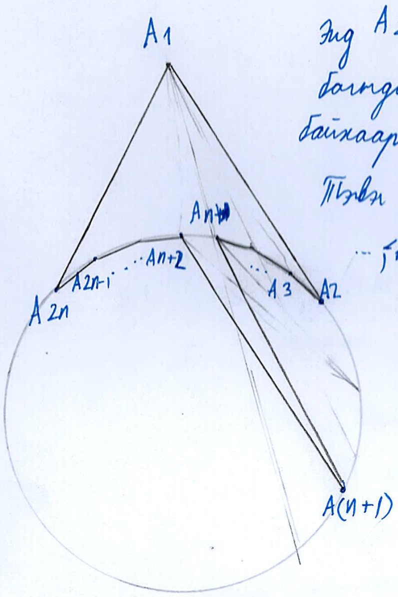
Иймд n=2 үед болно.

Одоо $n\geq 3$ үед болохгүй гэж харуулъя.



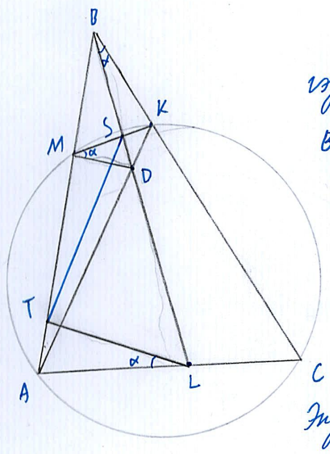
n=3 үед

A1-A4, A2-A5, A3-A6 нь олон өнцөгтийн гадна оршино. Болохгүй.



Энд $A_2A_3,\dots,A_{2n}$ нь тойрогт багтдаг, A_1 нь тойргийн гадна байхаар авъя.
Тэгвэл $\angle A_3>180^\circ, \angle A_4>180^\circ, \angle A_n>180^\circ, \angle A_{n+2}>180^\circ, \dots, \angle A_{2n-1}>180^\circ$ байхаар авъя.

Тэгвэл энд A_2-A_{n+2}, $A_3-A_{n+3}, \dots A_n-A_{2n}$ нь бүгд олон өнцөгтийн гадна оршино. Одоо A_1-A_{n+1} нь олон өнцөгтийн гадна байхаар A_{n+1} үзгийг сонгоход болно. $\angle A_1A_nA_{n+1}<180^\circ$ мөн $\angle A_1A_{n-1}A_{n+1}<180^\circ$ байхаар A_{n+1} үзгийг сонгоё. Тэгвэл A_1-A_{n+1} нь A_nA_{n-1} талыг дайрч A_1-A_{n+1} нь олон өнцөгтийн гадна оршино.
Эндээс $n=2$ гэж ганц шийдтэй.



AMKC нь тойрогт багтана гэдгээс $\angle BAC = \angle BKM$ ба BKDM нь тойрогт багтана гэдгээс $\angle BKM = \angle BDM$

$\Downarrow$

$\angle BKM = \angle BAC = \angle BDM$

$\Downarrow$

$\angle BDM = \angle BAC = \angle MAL$

Эндээс $\angle BDM = \angle MAL$ бөгөөд MDLA тойрогт багтана.

$\angle SBK = \angle TLA$, $\angle BKS = \angle LAT$ гэдгээс $\angle ATL = 180 - \angle TLA - \angle LAT = 180 - \angle SBK - \angle BKS = \angle BSK \Rightarrow \angle ATL = \angle BSK$ байна.

$\angle BSK = \angle MSL = \angle ATL$ гэдгээс TMSL нь тойрогт багтана.

$\angle BMS = \angle BLT$, $\angle MBS = \angle LBT \Rightarrow \triangle MBS \sim \triangle LBT$ мөн $\frac{MB}{BL} = \frac{BS}{BT}$

$\angle BDM = \angle BAL$, $\angle MBD = \angle LBA \Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle LBA$ $\downarrow$ $\frac{MB}{BL} = \frac{BD}{BA}$

$\frac{MB}{BL} = \frac{BS}{BT} = \frac{BD}{BA}$ болох ба $\frac{BS}{BD} = \frac{BT}{BA} \Rightarrow$ ТӨТ шинжээр $\triangle ABD \sim \triangle TBS$

$\angle ABD = \angle TBS$ $\quad$ $\angle BTS = \angle BAD$ болох ба

$\angle BTS = \angle BAK$ гэдгээс $TS \parallel AK$ болж батлагдав.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A3

Шифр 543 Одоо 7 Хуудас/Нийт 1 1

Эхлээд $7^k \mid 1+2^l+4^l$ байх l олдоно гэж харуулъя.

$1+2^l+4^l = \frac{8^l-1}{2^l-1}$

$(2,7)=1$ тул $2^6 \equiv 1(7)$

$2^1 \equiv 2(7)$ $2^2 \equiv 4(7)$ $2^3 \equiv 1(7)$ гэдгээс

$2^{3t} \equiv 1(7)$ $2^{3t+1} \equiv 2(7)$ $2^{3t+2} \equiv 4(7)$

болн $2^{3t+1}-1 \not\vdots\, 7$, $2^{3t+2}-1 \not\vdots\, 7$ байна.

$l = 7^{k-1}$ гэж авбал $(l,3)=1$ тул $2^l-1 \not\vdots\, 7$ байна.

Мөн зэрэг огтох леммээр $V_7(8^l-1) = V_7(8-1) + V_7(l) = k$

болн $7^k \mid 8^l-1$ болн батлагдана. $\Rightarrow$ $7^k \mid 1+2^l+4^l$

Одоо $7^k \mid 1+16^l+81^l$ гэж харуулъя.

$1+16^l+81^l-(1+2^l+4^l) = 2^l(8^l-1) + 81^l-4^l$ $\vdots$

Энд зэрэг огтох леммээр $V_7(81^l-4^l) = V_7(81-4) + V_7(l) = 1+k-1 = k$

Иймд $81^l-4^l \vdots\, 7^k$ Эндээс

$1+16^l+81^l-(1+2^l+4^l) = 7^k \cdot A$ ба $1+16^l+81^l = 7^k \cdot A + 7^k \cdot B$

$= 7^k \cdot (A+B)$ $\Rightarrow$ $1+16^l+81^l \vdots\, 7^k$ болн батлагдав.

$1+16^l+81^l = 1+(2)^{4l}+3^{4l} = 1+2^n+3^n \vdots\, 7^k$

$n = 4 \cdot l = 4 \cdot 7^{k-1}$ гэж авахад $1+2^n+3^n \vdots\, 7^k$ болн батлагдав.

$n=1$ үед $\frac{1-a_1a_2\dots a_n}{1} \le \frac{1}{1+a_1}$ $1-a_1^2 \le 1$ биелнэ.

Одоо n-ээр индукцлэе.
$n=k-1$ үед $\frac{1-a_1\dots a_{k-1}}{k-1} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_{k-1}}$ биелдэг гээд

$n=k$ үед баталъя.

$$\frac{1-a_1\dots a_k}{k} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_k}$$ гэж батална.

$\Updownarrow$

$$(1-a_1\dots a_k)(1+a_1+a_2+\dots+a_k) = (1-a_k+a_k(1-a_1\dots a_{k-1}))(1+a_1+\dots+a_k)$$

$$= (1-a_k)a_k + (1-a_k)(1+a_1+\dots+a_{k-1}) + a_k^2(1-a_1\dots a_{k-1}) + a_k(1-a_1\dots a_{k-1})(1+a_1+\dots+a_{k-1})$$

$\underset{k}{1\Gamma}$

Өмнөх баталснаар $a_k(1-a_1\dots a_{k-1})(1+a_1\dots+a_{k-1}) \le a_k(k-1)$ тул

$$(1-a_k)a_k + (1-a_k)(1+a_1+\dots+a_{k-1}) + a_k^2(1-a_1\dots a_{k-1}) \le k - a_k\cdot k + a_k$$

гэж батална.

$\Updownarrow$

$$(1-a_k)(1+\dots+a_{k-1}) + a_k^2(1-a_1\dots a_{k-1}) \le k - a_k\cdot k + \cancel{a_k} - \cancel{a_k} + a_k^2 = k(1-a_k) + a_k^2$$

гэж батална.

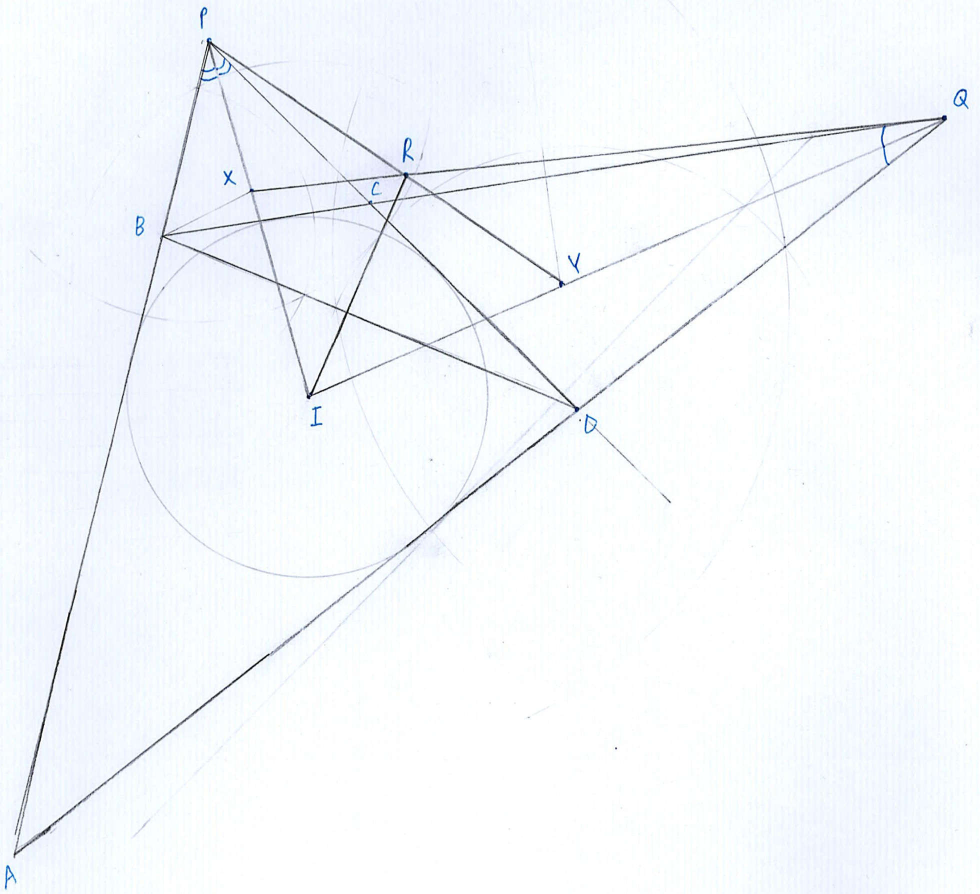
Тэгээд $0 \le a_i \le 1$ тул
$1+a_1+\dots a_{k-1} \le k \Rightarrow (1-a_k)(1+a_1+\dots+a_{k-1}) \le k(1-a_k)$
$1-a_k \ge 0$
$1-a_1\dots a_{k-1} \le 1$ $\quad a_k^2(1-a_1\dots a_{k-1}) \le a_k^2$ болж
$(1-a_k)(1+a_1+\dots+a_{k-1}) + a_k^2(1-a_1\dots a_{k-1}) \le k(1-a_k)+a_k^2$ батлагдав.
Эндээс $\frac{1-a_1\dots a_k}{k} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_k}$ батлагдана.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 621 | Бодлого: B1 | Хуудас/Нийт: 2/2

Энд тэнцэлдээ $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) = (0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1})$ үед хүрнэ.


P
Q
R
X
C
B
Y
I
D
A