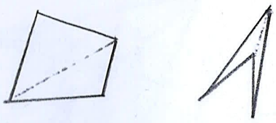
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A1

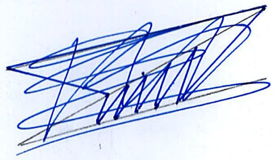
Шифр 2 0 0 6 Оноо 6

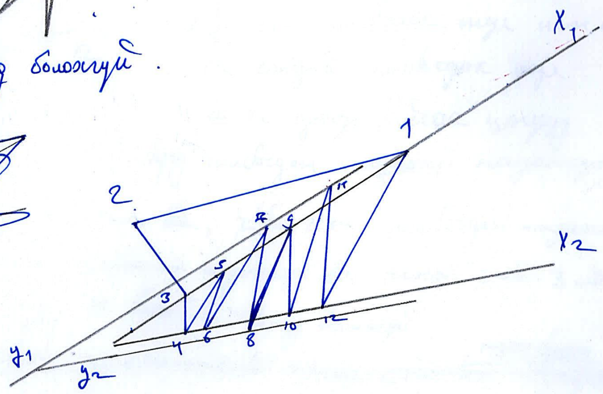
Хуудас/Нийт 1 2

$n=2$ үед Чөнхөг ~~болох~~ болон ба энэ үед ямар ч бай гэсэн нийт диагональ татаж болно.



$n=3$ ба түүнээс их үед болохгүй.





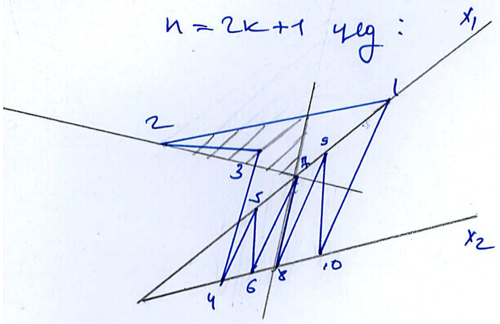
~~$n=2k$ үед~~ $n=2k$ үед цагийн зүүний эсрэг оройнуудаа 1-ээс $2n$ хүртэл дугаарлая.

Тэгвэл x орой $x+n$ оройтой холбогдох ёстой.

зурган дээрх шиг $1+n$ ба $2n-1$-ээс бусад бүх сондгой үзүүд x_1 шулуун дээр, 2 ба $2+n$-ээс бусад бүх цэгүүд x_2 шулуун дээр ба $1+n$ болон $2n-1$ нь x_1-тэй параллель y_1 шулуун дээр, $2+n$ нь x_2-той параллель y_2 шулуун дээр байгаа гэе.

Харин 2 нь $n+2$ той холбогдох нөхцөлгүй ямар нэг газар байгаа гэе ~~1 n+1 холбогдохгүй~~ $n=2k$ гэсэн тул сондгой оройтой, тэгш оройн тэгш оройтой холбогдох ба ~~2 ба 2+n бусад бүх орой~~ энэ нь боломжгүй. 1 ба $n+1$-ийг $2n-1$ холбуулахгүй. Бусад бүх сондгойг $n+1$ холбуулахгүй 2 ба $2+n$ нь холбогдсонгүй гэсэн тул таасангүй үлдсэн бүх тэгшийг $n+2$ холбуулахгүй.

$n = 2k+1$ үед:



Одоо 2 ба 3 аас ~~бус~~ бусад бүх цэгүүд сондгой нь x_1, тэгш x_2-дээр байна.

x ба $x+n$ холбогдох тул тэгш ба сондгой холбогдох тул x_1 ба x_2 дээр байгаа цэгүүд бүгд холбогдож ~~чадахгүй~~ чадахгүй.

~~Гэх~~ Иймд 3 ба $3+n$ ~~ба~~, 2 ба $2+n$ холбогдож чадахгүй бол нэг ч ийм диагональ олдохгүй ба нэгэн 2 ба 3-ийг авах боломжтой тул ~~бол~~ $n \geq 3$ үед болохгүй.

(~~Зураг зурсан дээрээс шиг 1, 2, 3, 4-ийг авбал 2-ыг нэг сондгой~~ ~~нэг бусад~~ ~~орохгүй~~

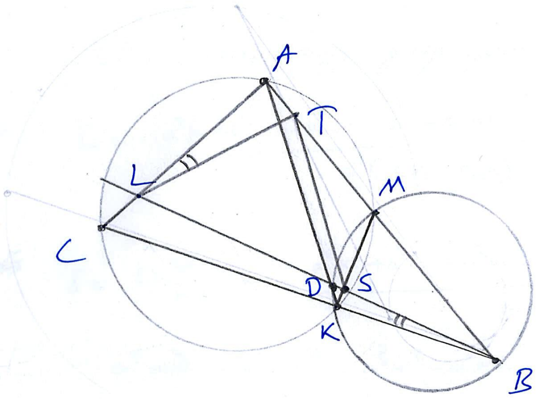
~~Зураг Зурсан дээрээс шиг 1, 2, 3, 4-ийг авбал~~

2, 3 бусад бүх ~~цэгээ~~ цэгээ байрлуулчихаад дараа нь 3-аа $n+3$ тай холбогдож чадахгүй байхаар аваад, мөн ч 3-ыг авсан $n+2$-ыг 2 той холбогдож чадахгүй байхаар 2-ыг авч чадна.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A2

Шифр 200 | Оноо 7 | Хуудас/Нийт 1 3



Комплекс тоогоор $A=a$ $|a|=1$, $M=m$ $|m|=1$, $K=k$ $|k|=1$, $C=c$ $|c|=1$ гэе.

$\frac{A-B}{A-M}\in\mathbb{R}$ $\quad \overline{B}=\frac{a+m-B}{am}$.

$\frac{C-K}{C-B}\in\mathbb{R}$ $\quad \overline{B}=\frac{c+k-B}{ck}$.

$B=\frac{am(c+k)-ck(a+m)}{am-ck}$.

$\frac{a-B}{\cancel{a-m}}=\frac{\overline{a}-\overline{B}}{\overline{a}-\overline{m}}\cdot\frac{am}{am}=\frac{m-am\overline{B}}{\cancel{m-a}}$

$\overline{B}=\frac{a+m-B}{am}$

$\cancel{\frac{A-K}{K-C}:\frac{D-M}{M-A}}\in\mathbb{R}$

DMBK 4 өнцөгт багтаасан гэдгээс $\frac{K-C}{A-K}:\frac{M-A}{D-M}\in\mathbb{R}$

$\cancel{\frac{(k-c)(m-a)}{(a-k)(B-m)}}\ \cancel{\frac{(\overline{k}-\overline{c})(\overline{m}-\overline{a})}{(\overline{a}-\overline{k})(\overline{D}-\overline{m})}}$

$\frac{(k-c)(D-m)}{(a-k)(m-a)}=\frac{(\overline{k}-\overline{c})(\overline{D}-\overline{m})}{(\overline{a}-\overline{k})(\overline{m}-\overline{a})}\cdot\frac{a^2mck}{a^2mck}=$

$=\frac{(c-k)(a^2m\overline{D}-a^2)}{(k-a)(a-m)c}$

$a^2m\overline{D}-a^2=mc-cD$

$\overline{D}=\frac{mc+a^2-cD}{a^2m}$.

$\frac{A-D}{A-K}\in\mathbb{R}$ $\quad \overline{D}=\frac{a+k-D}{ak}$

$\frac{a+k-D}{\cancel{a}k}=\frac{mc+a^2-cD}{a^2m}$

$a^2m+amk-amD=mck+a^2k-ckD$

$D=\frac{a^2m+amk-mck-a^2k}{am-ck}$

$\frac{M-S}{M-K}\in\mathbb{R}$ $\quad \overline{S}=\frac{m+k-S}{mk}$.

$\frac{A-L}{A-C}\in\mathbb{R}$ $\quad \overline{L}=\frac{a+c-L}{ac}$

$\frac{B-S}{B-D}\in\mathbb{R}$ $\quad \frac{amc+amk-ack-mck-S(am-ck)}{amc+\cancel{amk}-ack-\cancel{mck}-a^2m-\cancel{amk}+\cancel{mck}+a^2k}=$

$=\frac{amc+amk-ack-mck-S(am-ck)}{a(m-k)(c-a)}=$

$=\frac{\overline{amc}+\overline{amk}-\overline{ack}-\overline{mck}-\overline{S}(\overline{am}-\overline{ck})}{\overline{a}(\overline{m}-\overline{k})(\overline{c}-\overline{a})}\cdot\frac{a^3mck}{a^3mkc}=$

$=\frac{a^2k+a^2c-a^2m-a^3-\overline{S}a^2(ck-am)}{a(k-m)(a-c)}$

$$\overline{S} = \frac{a^2k + a^2c - a^2m - a^3 - amc - amk + ack + mck + s(am-ck)}{a^2(ck-am)}$$

BDSL нэг шулуун дээр оршиж тул

$$\overline{L} = \frac{a^2k + a^2c - a^2m - a^3 - amc - amk + ack + mck + L(am-ck)}{a^2(ck-am)}$$ болно.

$$\overline{S} = \frac{m+k-S}{mk} = \frac{a^2k + a^2c - a^2m - a^3 - amc - amk + ack + mck + s(am-ck)}{a^2(ck-am)}$$

$$\cancel{a^2mck} + a^2ck^2 - a^3m^2 - \cancel{a^3mk} - Sa^2(ck-am) = a^2mk^2 + \cancel{a^2mck} - a^2m^2k - \cancel{a^3mk} - am^2ck - am^2k^2 + amck^2 + m^2ck^2 + Smk(am-ck)$$

$\cancel{S(am-ck)(mk-a^2)}$

$$S = \frac{a^2ck^2 - a^3m^2 - a^2mk^2 + a^2m^2k + am^2ck + am^2k^2 - amck^2 - m^2ck^2}{(am-ck)(mk-a^2)}$$

$$\overline{L} = \frac{a+c-L}{ac} = \frac{a^2k + a^2c - a^2m - a^3 - amc - amk + ack + mck + L(am-ck)}{a^2(ck-am)}$$

$$\cancel{a^2ck} + \cancel{ac^2k} - a^3m - \cancel{a^2mc} - La(ck-am) = \cancel{a^2ck} + a^2c^2 - \cancel{a^2mc} - a^3c - amc^2 - amck + \cancel{ac^2k} + mc^2k + Lc(am-ck)$$

$$L = \frac{amck + amc^2 + a^3c - mc^2k - a^2c^2 - a^3m}{(am-ck)(c-a)} = \frac{mck(a-c) + a^2c(a-c) + am(c^2-a^2)}{(am-ck)(c-a)} =$$

$$= \frac{amc + a^2m - a^2c - mck}{am-ck}.$$

$$\frac{A-T}{A-M} \in \mathbb{R} \quad \overline{T} = \frac{a+m-T}{am}.$$

$$\angle ALT = \angle CBL \Rightarrow \frac{C-K}{D-B} : \frac{A-C}{T-L} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(c-k)\cancel{(am-ck)}}{a^2m + \cancel{amk} - \cancel{mck} - a^2k - amc - \cancel{amk} + ack + \cancel{mck}} \cdot \frac{T(am-ck) - amc - a^2m + a^2c + mck}{\cancel{(am-ck)}(a-c)} =$$

$$= \frac{(c-k)(T(am-ck) - amc - a^2m + a^2c + mck)}{a(a-c)(a-c)(m-k)} = \frac{(\overline{c}-\overline{k})(\overline{T}(\overline{am}-\overline{ck}) - \overline{amc} - \overline{a^2m} + \overline{a^2c} + \overline{mck})}{\overline{a}(\overline{a}-\overline{c})(\overline{a}-\overline{c})(\overline{m}-\overline{k})}$$

$$\frac{\cancel{(c-k)}\left(T(am-ck)-amc-a^2m+a^2c+mck\right)}{\cancel{a(a-c)(a-c)(m-k)}} = \frac{(\bar{c}-\bar{k})\left(\bar{T}(\bar{a}\bar{m}-\bar{c}\bar{k})-\bar{a}\bar{m}\bar{c}-\bar{a}^2\bar{m}+\bar{a}^2\bar{c}+\bar{m}\bar{c}\bar{k}\right)}{\bar{a}(\bar{a}-\bar{c})(\bar{a}-\bar{c})(\bar{m}-\bar{k})} \cdot \cancel{a^4} \cdot \frac{a^4c^2mk^2}{a^4c^2mk^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(k-c)}\left(Ta^3(ck-am)-a^3k-a^2ck+a^2mk+a^4\right)}{\cancel{a(c-a)(c-a)(k-m)}\,k}.$$

$$Tk(am-ck)-amck-a^2mk+a^2ck+mck^2 =$$
$$= Ta^3(ck-am)-a^3k-a^2ck+a^2mk+a^4$$

$$T = \frac{Tk(am-ck)-amck-a^2mk-a^2mk-a^4+a^2ck+a^2ck+mck^2+a^3k}{a^2(ck-am)} = \frac{a+m-T}{\cancel{a}m}$$

$$Tmk(am-ck)-am^2ck-2a^2m^2k\cancel{-a^4m}\cancel{+a^2mck}+m^2ck^2+a^3mk =$$
$$= a^3ck+\cancel{a^2mck}-\cancel{a^4m}-a^3m^2-Ta^2(ck-am)$$

$$T = \frac{a^3ck-a^3m^2+am^2ck+2a^2m^2k-a^2mck-m^2ck^2-a^3mk}{(am-ck)(mk-a^2)}$$

Байлгах нөхцөл $TS \parallel AK \Rightarrow \frac{T-S}{A-K} \in \mathbb{R}. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a^3ck\cancel{-a^3m^2}\cancel{+am^2ck}+\cancel{2}a^2m^2k-a^2mck\cancel{-m^2ck^2}-a^3mk-a^2ck^2\cancel{+a^3m^2}+a^2mk^2\cancel{-a^2m^2k}\cancel{-am^2ck}+am^2k^2+amck^2\cancel{+m^2ck^2}}{(am-ck)(mk-a^2)(a-k)} =$$

$$= \frac{a^3ck+a^2m^2k-a^2mck-a^3mk-a^2ck^2+a^2mk^2-am^2k^2+amck^2}{(am-ck)(mk-a^2)(a-k)} =$$

$$= \frac{ak(a-m)(c-m)(a-k)}{(am-ck)(mk-a^2)(a-k)} = \frac{\bar{a}\bar{k}(\bar{a}-\bar{m})(\bar{c}-\bar{m})(\bar{a}-\bar{k})}{(\bar{a}\bar{m}-\bar{c}\bar{k})(\bar{m}\bar{k}-\bar{a}^2)(\bar{a}-\bar{k})} \cdot \frac{a^4k^3m^2c}{a^4k^3m^2c} =$$

$$= \frac{ak(m-a)(m-c)(k-a)}{(ck-am)(a^2-mk)(k-a)}$$

Иймд бодлого батлагдлаа.

~~a_1~~ $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ гэе.

$$\frac{1 - a_1a_2\ldots a_n}{n} \leq \frac{1}{1+a_1+a_2+\ldots a_n}$$

$$1 - a_1a_2\ldots a_n \leq \frac{n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

$a_1+a_2+\ldots+a_n \leq n-1$ бол шууд үнэн болно.

Иймд $a_1+a_2+\ldots+a_n > n-1$ гэе.

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n = n-q$ гэе $0 \leq q \leq 1$.

$a_1a_2\ldots a_n \geq 1-q$ гэж баталъя

$a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$

$a_n + a_{n-1} = x$ гэвэл $a_n = \frac{x}{2} - t$

$a_{n-1} = \frac{x}{2} + t$ гээд

$a_n \cdot a_{n-1} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - t^2$ ба энэ нь хамгийн багадаа $a_{n-1} = 1$ үед байх тул

$a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n \geq a_1a_2\ldots a_{n-2}\cdot 1\cdot(a_n+a_{n-1}-1)$. Энэ үйлдлийг $n-1$ удаа хийж $a_1a_2a_3\ldots a_n \geq 1-q$ баталагдана

$1+a_1+a_2+\ldots+a_n - a_1a_2\ldots a_n(1+a_1+a_2+\ldots+a_n) \leq$

$\leq q(1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n) \leq n$

$q+(1+a_1+a_2+\ldots+a_n) = n+1$. ~~тул~~ ба $\frac{n+1}{2} - x = q$

$\frac{n+1}{2} + x = 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$ гэвэл

$q(1+a_1+a_2+\ldots+a_n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - x^2$ ба

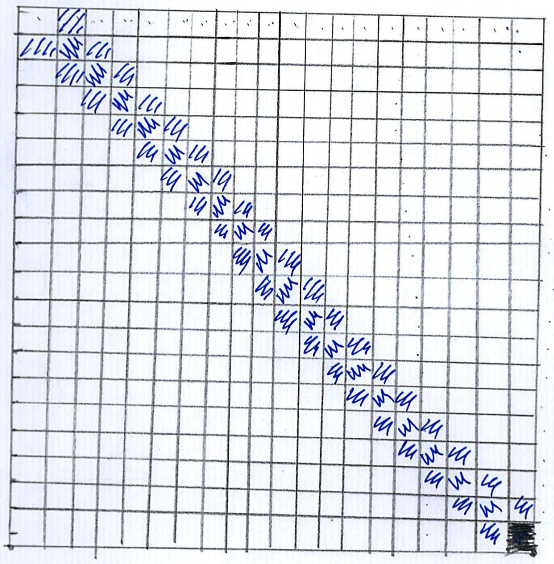
энэ нь хамгийн ихдээ $q=1$ үед n гарна.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B2

Шифр: 600 Оноо: 7

Хуудас/Нийт: 1 1.



[box], [box] хар өнгөөр будсан гэе.
Тэгвэл одоо ямар ч 2 [box] 1 тэгш өнцөгтөд орж чадахгүй.
Мөн ямар ч 2 [box] 1 [illegible] орж чадахгүй.
Зөвхөн 1 [box] ба 1 [box] нийтдээ ~~1 тэгш~~ 1 тэгш өнцөгтөд орж 2 хар нүдтэй болж чадна. Иймд 38 [box] ба 18 [box] байгаа тул хамгийн олон 2 хартай тэгш өнцөгт авсан ч 20 ш [box] үлдэх ба энэ нь бүгд нүдээ 1,1-ээрээ тэгш өнцөгтөд орох тул $n(P)=20$.

20-оос их ~~байж болохгүйг~~ байхгүйг батлъя.
20×20-ын ~~дүрэм~~ дүрэм 1 мөрийг ~~авбал энэ~~ ~~мөрөнд 20~~ авъя.
Одоо энэ мөрөнд 0 эсвэл 1ш хар нүд байвал шууд бүхэлд нь 1 тэгш өнцөгт.
Түүнээс олон байвал, тэгш тооны хар нүдтэй бол ~~...~~ бүх нүднүүдээ 2 хар нүдтэй тэгш ~~өнцөгтөд~~ өнцөгтүүдэд хувааж чадна,
сондгой тооны хар нүд байвал хамгийн баруун талынх нь хар нүдээс үүнээс баруун талын бүх хоосон нүднүүдийг 1 тэгш өнцөгт болгоод үлдэх нүднүүдийг 2, 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж чадна.
Иймд 1 мөрийг дангаар нь хамгийн олондоо 1, 1-ээс олонгүй хар нүдтэй тэгш өнцөгттэй байхаар хувааж чадна.
Нийт 20 мөр байгаа тул хамгийн олондоо 20 болно.
Иймд $n(P)=20$.