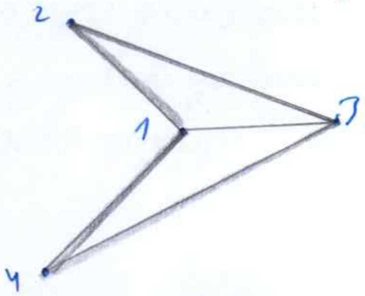
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

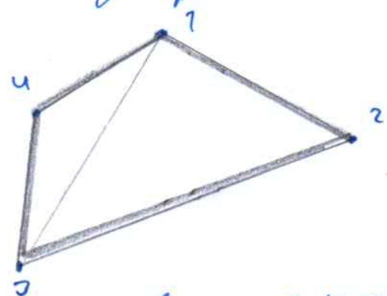
A1

Шифр: 558 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1 2

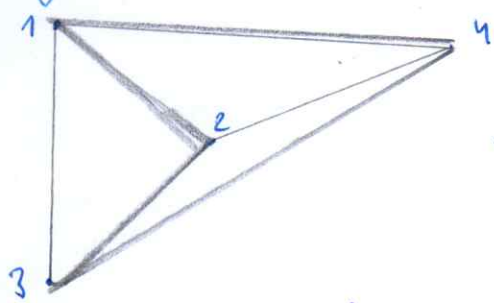
Хариу: $n=2$.

Эхлээд $n=2$ үед ийм чанартай диагональ жинхэнэ гадаах харуулъя. 4 өнцөгт б/на. Аль нэг оройгоос эхлэн 1, 2, 3, 4 гэж дугаарлая. Тэгвэл (1, 3) (2, 4) нь $1=1$ тооны оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваадаг диагональ юм.
(1, 3) нь нь өнцөгт-н дотор байвал бодлого бодогдоно.

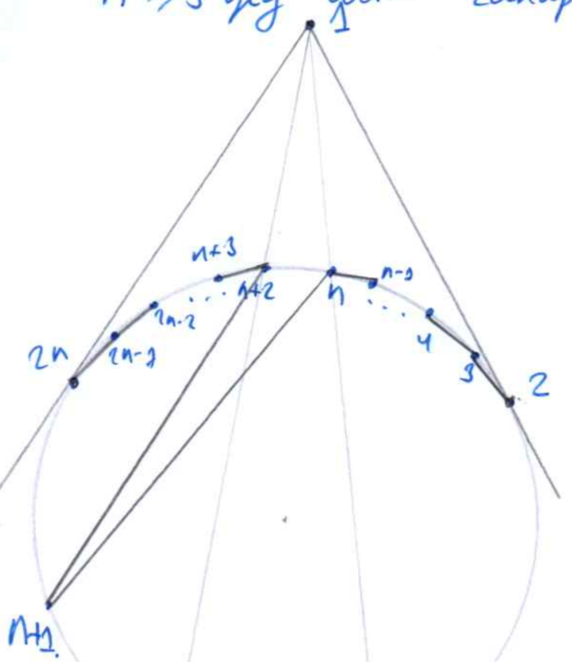




гадна б/дог гэж үзвэл: 2, 4 орой нь (123) (143) гэсэн нэг нь нөгөөгийнхөө дотор орших △ үүсгэнэ → (24) диагональ нь 4 өнцөгт дотор оршино. (1 нь нь нөгөөгийнхөө дотор оршихгүй гэвэл олон өнцөгт талаа огтлох бөгөөд зөрчил үүснэ)



$n \geq 3$ үед ийм чанартай диагональ олдохгүй жишээ үзүүлье.



Оройнуудыг 1 оройгоос эхлэн дараалуулан 1, 2, 3, ... 2n гэе. Энд (k, k+n) диагональ нь (=) тооны оройтой 2 хэсэгт хуваах ёстой. Дурын ω тойрог ба түүний гадна орших цэг авъя. Үүнийг 1 орой болгоё.
1-ээс ω руу шүргэгч татан шүргэлтийн цэгүүдийг 2 ба 2n гэсэн орой болгоё. 2 ба 2n-н бага нумыг 2n-3 ш тэнцүү нумуудад хуваан хуваалтын цэгүүдийг 3, 4, ... n, n+2, n+3, ... 2n гэж дугаарлая. Одоо (n+1) оройг байгуулъя.
$\omega \cap (n+2, 1) = A$ | б/г. ~~[illegible]~~

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 558 Бодлого: A1 Хуудас/Нийт: 2 2

$\overline{2n,A}$ эсвэл $\overline{2,B}$ бага тоонууд дээрх дүрэм ижил болно.
$\overline{2n,A}$ дээр $(n+1)$-г сонгосон бн.

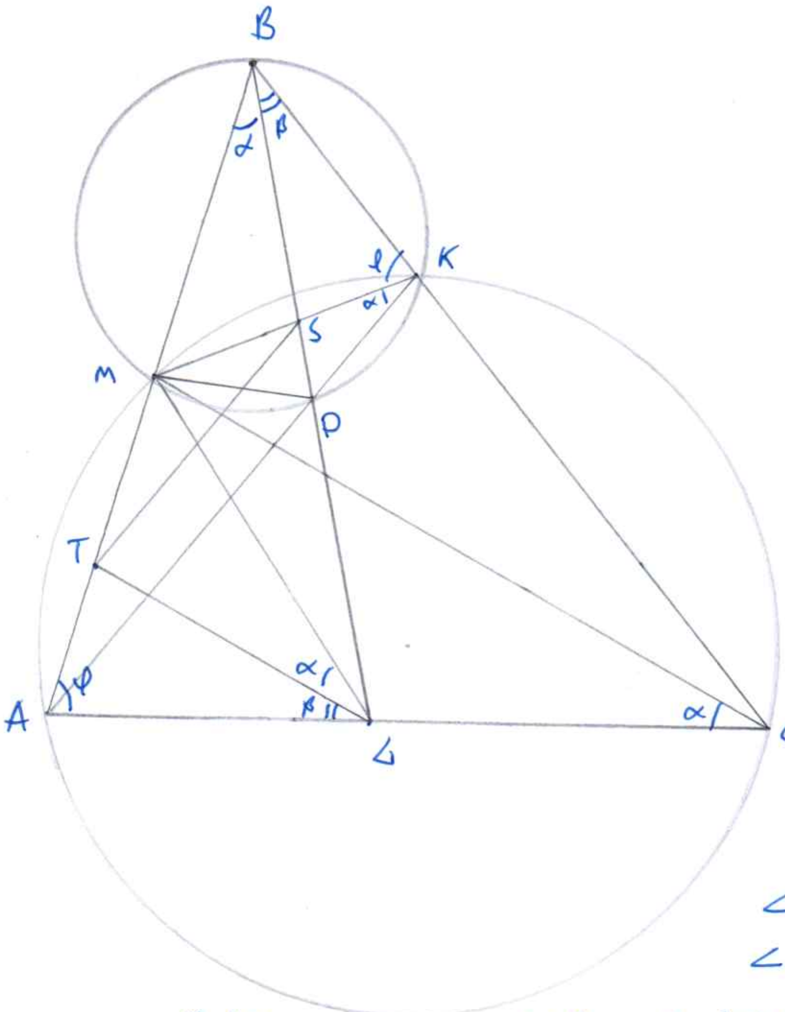
Одоо, $(1,2,3, \dots 2n)$ олон ~~өнцөгтөө~~ сонгоё.

$(k, n+k)$, $k=\overline{2,n}$ | диагоналиуд нь ω дотор б/х ба олон өнцөгтөд ороогүй хэсгийг заавал дайрах тул эдгээрээ болгож болохгүй!

$(1, n+1)$ диагональ мөн ω дотор б/х олон өнцөгтөд ороогүй хэсгийг заавал дайрна. $\Rightarrow$ $n \geq 3$ үед $1, 2, n, n+1, n+2, 2n$ цэгүүд хоорондоо давхцахгүй болохоор гадах тул диагональ татаж чадахгүй. $\Rightarrow$

Хариу: $n=2$.

Батлах $TS \parallel AK$.



Бодолт. $\angle LBC = \angle ALT = \beta$ гэе.

Мөн $\angle MBS = \alpha$ гэе.

BKDM тойрогт багтана => $\angle MBS = \angle MKD = \alpha$ болно.

Нөгөө талаас AMKC тойрогт багтана => $\angle MKD = \angle MKA = \angle MCA = \alpha$ болно. =>

$\angle MBL = \angle MCA = \alpha$ =>

BCLM тойрогт багтана.

=> $\angle MBC + \angle MLC = 180^\circ$ б/х ёстой. =>

$\angle MLC = 180^\circ - \angle MBC = 180^\circ - (\alpha+\beta)$

$\angle MLA = 180^\circ - \angle MLC = 180 - 180 + (\alpha+\beta) = \alpha+\beta$ болно =>

$\angle MLA = \angle MLT + \angle TLA$ =>

$\angle MLT = \angle MLA - \angle TLA = (\alpha+\beta) - \beta = \alpha$.

Мөн $\angle BAC = \varphi$ гэе. AMKC нь 1 тойрог дээр оршино => $\angle MKC = 180 - \varphi$ => $\angle BKM = \varphi$ б/на.

$\angle MBK = \angle MLA = \alpha+\beta$, $\angle BKM = \angle MAL = \varphi$ | => $\triangle MBK \sim \triangle MLA$ ба BS нь $\angle MBK$-г α, β гэж хуваана, LT нь $\angle MLA$-г α, β гэж хуваана => Төсөөтэй Δ-ын харгалзах хэрчмүүдийн харьцаа (=) =>

$\frac{MS}{SK} = \frac{MT}{TA}$ => $TS \parallel AK$ болно (Фалес-н thr) ▲

Энд $\triangle MBK \sim \triangle MLA$ => $\angle BMK = \angle TML$, $\angle MLT = \angle MBS = \alpha$ | => $\triangle MTL \sim \triangle MSB$ => $\frac{MT}{TL} = \frac{MS}{SB}$ => $\frac{MT}{MS} = \frac{TL}{SB}$.

$\angle BKS = \angle TAL = \varphi$, $\angle SBK = \angle TLA = \beta$ | => $\triangle SBK \sim \triangle TLA$ => $\frac{SB}{SK} = \frac{TL}{TA}$ => $\frac{TL}{SB} = \frac{TA}{SK}$ =>

$\frac{TL}{SB} = \frac{TA}{SK} = \frac{MT}{MS}$ => $\frac{MS}{SK} = \frac{MT}{TA}$ => $TS \parallel AK$ (Фалес) ▲

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A3

Шифр: 558 Оноо: 2

Хуудас/Нийт: 1/3

$n = 2\cdot 7^{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}$ гэдгийг харуулна. ($\exists k\in$ натурал тоо).

<u>Лемм</u>. $a \equiv b\ (p^e)$ бол $a^p \equiv b^p\ (p^{e+1})$ -г баталъя. $(ab, p)=1$

Баталгаа

$(ab,p)=1$ тул b-ийн p-н зэрэгт модулиар урвуутай.

$\frac{a}{b} \equiv 1 (p^e)$ $\frac{a^p}{b^p} \equiv 1 (p^{e+1})$ гэж батлах болно. $\left(\frac{a}{b}\right)^p \equiv 1 (p^{e+1}) \Rightarrow$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 \equiv 0 (p^{e+1})$ болно $\Rightarrow$

$\left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 = \left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{p-2} + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right)$ энд $\frac{a}{b}-1 \vdots p^e$ б/на.

$\frac{a}{b} \equiv 1 (p^e) \Rightarrow \frac{a}{b} \equiv 1 (p) \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m \equiv 1 (p)$ $m = \overline{p-1, 0}$ $\Rightarrow$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{p-2} + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 \equiv \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} \equiv 0 (p) \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 \vdots p^{e+1}$

болж батлагдав.

$n = 2\cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot \ldots \cdot 7^{k+1} = 2\cdot 7^{\frac{(k+3)k}{2}}$ -г индукцээр.

$k=1$ үед $1 + 2^2 + 3^2 = 14 \equiv 0 (7)$. $\Rightarrow n=2$. $\Rightarrow$ үнэн?

~~$k=2$ үед $1+2^2 \equiv -3^2 (7) \Rightarrow$ леммээсээ $(1+2^2)^7 \equiv (-3^2)^7 (7) \Rightarrow$~~

~~$(1+2^2)^{7^2} \equiv (-3^2)^{7^2} (7^3)$ $(-1)^{7^2} \equiv (-1)^{49} \equiv -1 (7^2)$~~

~~$(1+2^2)^{7^2} \equiv -(3^2)^{7^2} (7^2) \Rightarrow (1+2^2)^{7^2} + 3^{2\cdot 7^2} \equiv 0 (7^2) \Rightarrow$~~

~~$1 + 2^{2\cdot 7^2} + 3^{2\cdot 7^2} + \left(C_{7^2}^1 \cdot 2^2 + C_{7^2}^2 (2^2)^2 + \ldots + C_{7^2}^{7^2-1}\cdot (2^2)^{7^2-1}\right) \equiv 0 (7^2)$~~

~~$\Rightarrow C_{7^2}^s \vdots 7^2$ $1 \le s \le 7^2-1$. гэж харуулна.~~

~~$C_{7^2}^s = \frac{(7^2)!}{s!\cdot(7^2-s)!}$~~

~~$v_p(m)$ - энэ m-ийн p-ийн хэдэн зэрэгт хуваагдахыг тэмдэглэе.~~

~~$v_p(m!) = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \ldots$ б/на.~~

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 558 Бодлого: A3 Хуудас/Нийт: 2 3

~~$v_7((7^2)!) = \left\lfloor \frac{7^2}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7^2}{7^2} \right\rfloor = 8$~~

~~$1 \le s \le 7^2 - 1$ б/н тул $s < 7^2$, $(7^2 - s) < 7^2 \Rightarrow$~~

~~$v_7(s) + v_7(7^2 - s) = \left\lfloor \frac{s}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7^2-s}{7} \right\rfloor$~~

$k = 2$ үед $n = 2 \cdot 7^2 = 98$

$1 + 2^{98} + 3^{98} \vdots 49$, $\Rightarrow$ $2^{98} \equiv (2^7)^{14} \equiv (128)^{14} \equiv (30)^{14} \equiv (900)^7 \equiv$

$\equiv (18)^7 \equiv (30)^3 \cdot 18 \equiv 18^2 \cdot 30 \equiv 30^2 \equiv 900 \equiv 18 \ (49)$

$3^{98} \equiv (3^5)^{19} \cdot 3^3 \equiv (-2)^{19} \cdot 3^3 \equiv -2^{19} \cdot 3^3 \equiv -2^5 \cdot (2^7)^2 \cdot 3^3 \equiv -2^5 \cdot (30)^2 \cdot 3^3 \equiv$

$\equiv -32 \cdot 18 \cdot 27 \equiv 17 \cdot 27 \cdot 18 \equiv -31 \cdot 18 \equiv -19 \ (49) \Rightarrow 1 + 2^{98} + 3^{98} \equiv$

$1 + 18 - 19 \equiv 0 \ (49) \Rightarrow$ суурь үнэн.

7^k үед $n = 2 \cdot 7^{\frac{(k-1)(k+1)}{2}}$ гэж үзээ 7^{k+1} үед $n = 2 \cdot 7^{\frac{k(k+1)}{2}}$ гэж харуулаа.

$1 + 2^2 \equiv -3^2 \ (7) \Rightarrow$ лемм ёсоор $(1+2^2)^7 \equiv (-3^2)^7 \ (7^2)$ гэх лемээ

k удаа хэрэглэвэл $(1+2^2)^{7^k} \equiv (-3^2)^{7^k} \ (7^{k+1})$ болно.

Энд $7^{\frac{k+1}{2}}$-н зэрэгт дэвшүүлбэл $(1+2^2)^{7^{\frac{k(k+1)}{2}}} \equiv (-3^2)^{7^{\frac{k(k+1)}{2}}} \ (7^{k+1})$ болно

$(1+2^2)^{7^{\frac{k(k+1)}{2}}} \equiv -3^{2 \cdot 7^{\frac{k(k+1)}{2}}} \ (7^{k+1}) \Rightarrow n : 2 = n_0$ гэж тэмдэглэе. $n_0 = 7^{\frac{k(k+1)}{2}}$

$1 + 2^{2 \cdot 7^{\frac{k(k+1)}{2}}} + 3^{2 \cdot 7^{\frac{k(k+1)}{2}}} + \left(C_{n_0}^1 \cdot 2^2 + C_{n_0}^2 \cdot (2^2)^2 + \dots + C_{n_0}^{n_0-1} (2^2)^{n_0-1} \right) \equiv 0 \ (7^{k+1})$

$\Rightarrow C_{n_0}^s \vdots 7^{k+1}$ ба $s = \overline{1, n_0 - 1}$ гэж батлахад хангалттай.

$n_0 = 2 \cdot 7^{\frac{k(k+1)}{2}}$ үед 7^{k+1}-д хуваагдах болно.

$v_p(m)$-ээр m-н p-н хэдэн зэрэгт хуваагдаг-г тэмдэглэе.

$v_p(m!) = \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \dots$ б/на.

$C_n^s = \frac{n_0!}{s! \cdot (n_0 - s)!} \Rightarrow v_7(s!) + v_7((n_0 - s)!) + k + 1 \le v_7(n_0)$ гэж

батлах болно.

$7^m \le s < 7^{m+1}$ б/г. $v_7(s!) \le s \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^m} \right) = s \cdot \frac{7^m - 1}{6 \cdot 7^m}$

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр 5 5 8

Бодлого A 3

Хуудас/Нийт 3 3

$n_0 = 7^{\frac{(k+1)k}{2}} \Rightarrow v_7(n_0) = 7^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7^{\frac{(k+1)k}{2}}}\right) =$

$= \frac{7^{\frac{(k+1)k}{2}} - 1}{6} = \frac{n_0}{6} - \frac{1}{6}.$

$v_7(s!) + v_7((n_0 - s)!) + k + 2 \leq s \cdot \frac{7^m - 1}{6 \cdot 7^m} + (n_0 - s) \cdot \left(\frac{7^l - 1}{6 \cdot 7^l}\right) + k + 2 \leq \frac{n_0}{6} - \frac{1}{6}$ $/ \cdot 6$

$\cancel{s} - \frac{s}{7^m} + \cancel{n_0 - s} + \frac{n_0 - s}{7^l} + 6(k+1) \leq \cancel{n_0} - 1 \Rightarrow$

$6k + 7 \leq \frac{s}{7^m} + \frac{n_0 - s}{7^l}$. $s = 7^m + s_1$ $n_0 = 7^{\frac{k(k+1)}{2}}$

$n_0 - s = 7^l + s_2$

$m > l$ гэж үзье.

$1 \leq s \leq n_0 - 1$ тул $m, l \leq \frac{k(k+1)}{2} - 1$ байна.

$\cancel{\frac{s}{7^m} + \frac{n_0 - s}{7^l} > \frac{s + n_0 - s}{}}$

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B1

Шифр 681 Оноо 1

Хуудас/Нийт 1 2

n-ээр индукцлэе.

$n=1$ үед $\frac{1-a_1}{1} \le \frac{1}{1+a_1} \Rightarrow (1-a_1)(1+a_1) \le 1$.

$1-a_1^2 \le 1 \Rightarrow$ үнэн. $a_1=0$ үед (=) хүрнэ.

$(n-1)$ үед үнэн гэж үзээд n үед батална.

$\frac{1-a_1\cdot a_2\dots a_n}{n} \le \frac{1}{1+a_1+a_2+\dots+a_n} \Rightarrow$ Энд (=) хүрэх нөхцөл нь $(a_1, a_2\dots a_n)=(0,\underbrace{1,\dots,1}_{n-1})$ үед юм.

$(1-a_1\cdot a_2\cdot\dots a_n)(1+a_1+a_2+\dots+a_n) \le n$ болно $\Rightarrow$ Одоо зарим тоонуудыг хөшинө. $\max\{a_1,a_2\dots a_n\}$-г a_{n+1} гэж бичээд $\max\{a_1,a_2\dots a_n\}=a_i$ бол $a_i=1$ гэж сольно.

Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл бичи:

$(1-a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_{n+1})(1+ ?? a_1+a_2+\dots+a_{n+1}) \le n$ болно.

$a_1+a_2+\dots+a_{n+1} \le n + a_1a_2\cdot\dots a_{n+1}(a_1+a_2+\dots+a_{n+1})$-гэж батална.

ИӨА-аар $\frac{1-a_1\cdot a_2\dots a_{n-1}}{n-1} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_{n-1}}$ энд $1=a_n$ гэвэл

$\frac{1-a_1\cdot a_2\cdot\dots a_n}{n-1} \le \frac{1}{a_n+a_1+\dots+a_{n-1}} \Rightarrow$

$a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n \le n-1+a_1\cdot a_2\cdot\dots a_n(a_1+a_2+\dots+a_n)$ болно.

Үүний 2 талд дээр a_{n+1}-г нэмж авбал

$a_1+a_2+\dots+a_{n+1} \le a_{n+1}+n-1+a_1a_2\cdot\dots a_n(a_1+a_2+\dots+a_n)$ болно. $\Rightarrow$

$a_{n+1}+(n-1)+a_1a_2\cdot\dots\cdot a_n\cdot(a_1+a_2+\dots+a_n) \le n+a_1a_2\cdot\dots a_{n+1}(a_1+a_2+\dots+a_{n+1})$

гэж батлахад хангалттай.

$a_{n+1}+a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n(a_1+a_2+\dots+a_n) \le n+a_1\cdot a_2 \dots$

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 6 8 1 | Бодлого: B 1 | Хуудас/Нийт: 2 2

$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = P$, $a_1 + a_2 \ldots + a_n = S$ гэе.

$a_{n+1} + P \cdot S \leq 1 + P a_{n+1} \cdot (S + a_{n+1})$ болно. a_{n+1} нь $\max\{a_1 \ldots a_n\}$

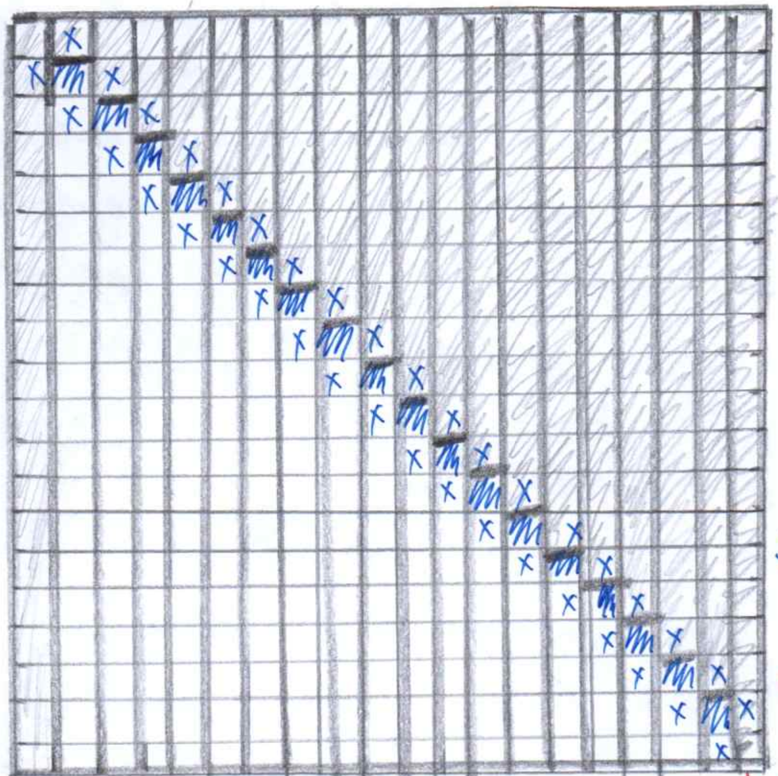
$\Rightarrow$ $a_{n+1} \geq \frac{S}{n}$ б/на. Мөн $P \leq a_{n+1}^n$ б/на.

$PS \cdot a_{n+1} + P \cdot a_{n+1}^2 + 1 \geq PS + a_{n+1}$

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B2

Шифр: 681 Оноо: 7 Хуудас/Нийт: 1/2

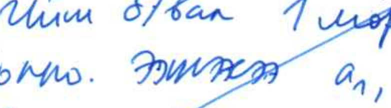


n(P) = 20 байх байгуулалтыг харъя. Зураг (ɱ), (X) тэмдэглэгээтэй нүднүүдийг будагдсан гэж үзнэ.

Тэгвэл нөхцөл ёсоор (X) тэмдэгтэй 2 нүд 1 өнцөгтөд хамт орж чадахгүй. Хамт орвол хоёроос олон будагдсан нүд тэгш өнцөгтөд орох болж зөрчил үүснэ. ⇒ 38ш (X) тэмдэг байгаа. 18ш (ɱ) тэмдэг байгаа ⇒ Доор хамгийн 38ш тэгш өнцөгт байх ба 18ш-л хамгийн ихдээ 2 хар нүдтэй байж болно. (ɱ) тэмдгийн тоогоор. ⇒ 38 − 18 = 20ш нь (Доор хамгийн) 1ш хар нүдтэй байна. ⇒ Зураг дээрх шиг хуваавал харгалзан будсан тэгш өнцөгтүүд 1 хар нүдтэй байна. ⇒ n(P) = 20 байх байгуулалт олдов.

~~Одоо ямар ч будалтанд 20-оос илүүгүй 1, 0 хартай тэгш өнцөгт гаргаж чадахыг харуулъя. 20×20-ыг 2×10 гэж 10 тэгш өнцөгтөнд хуваая. (2 мөр нүдэн, 2, 2-оор нь хуваая). Одоо энэ 2×10 тэгш өнцөгтөд байгаа хар нүднүүдийг авч үзье.~~

~~а.)~~



~~— тэгш (энэ мөрөнд дэх хар нүдний тоо)~~
~~— тэгш~~

~~Гэж байвал 1 мөр доторх хар нүднийг 2; 2-оор нь хуваах болно. Энэхүү $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ нүдэнд байвал тэгш өнцөгтөө $(1, a_3-1)(a_3, a_5-1)\ldots(a_{2n-1}, 20)$ гэж авна.~~

б.) тэгш, сондгой үед

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 681 | Бодлого: B2 | Хуудас/Нийт: 2/2

Одоо ямар ч будалтанд 20-оос илүүгүй 1 эсвэл 0 хартай тэгш олонлог гаргаж чадахыг харуулъя.

20×20-оо мөр, мөрөөр нь 1×20 болгож хуваая.

1 мөрөнд • тэгш тооны хар нүд б/вал

мөрийн эхнээс $1, 2, \ldots 20$ гэж дугаарлаад $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$-нүднүүд хар б/вал $(1, a_3-1)(a_3, a_5-1) \ldots (a_{2n-1}, 20)$ гэж тэгш олонлогоо авна. Энэ мөрөнд 0ш 1 эсвэл 0 хар нүдтэй тэгш олонлог б/на.

• ямар ч хар нүдгүй бол нүдүүд 1×20 гэж сонговол 1ш 0 нүдтэй тэгш олонлог.

• сондгой тооны хар нүд б/вал

$a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ -нүд нь хар б/г.

$(1, a_3-1), (a_3, a_5-1) \ldots (a_{2n-1}, a_{2n+1}-1)(a_{2n+1}, 20)$ гэж авбал $(a_{2n+1}, 20)$ энэ хүснэгтэнд 1ш хар, бусад хүснэгтэнд хосоор орно $\Rightarrow$ 1ш 1 хар нүдтэй хүснэгт.

Эндээс үзвэл 1 мөрөнд ХИ-дээ 1ш 1 эсвэл 0 хар нүдтэй хүснэгт б/на $\Rightarrow$ ХИ-дээ 20ш ийм хүснэгт б/ж чадна.

Хариу: $\max(P) = 20$