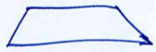
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A1

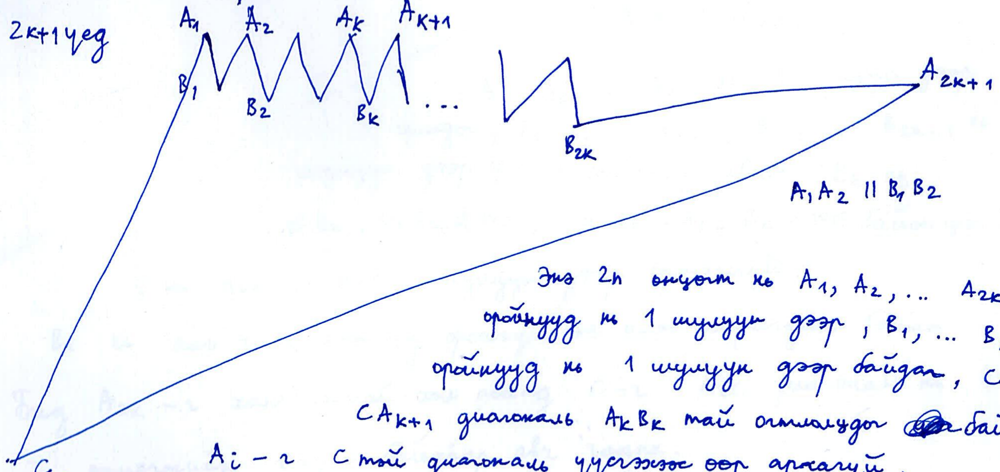
Шифр 545 Оноо 4

Хуудас/Нийт 1 2

n = 2 үед  ба  2 боломжтой.

  ⇒ n = 2 үед болно.

n = 2k+1 үед



$A_1A_2 \parallel B_1B_2$

Энэ 2n өнцөгт нь $A_1, A_2, \dots A_{2k+1}$ оройнууд нь 1 шулуун дээр, $B_1, \dots B_{2k}$ оройнууд нь 1 шулуун дээр байдаг, C нь CA_{k+1} диагональ A_kB_k тай огтлолцдог байх үе.

A_i - г C тэй диагональ үүсгэхээс өөр аргагүй.

A_iC диагональ нь 2n олон өнцөгтөд бүхэлдээ багтдаг байг.

Тэгвэл $2i$ ба $4k+4-2i$ олон өнцөгтөд хуваагдана. $i \neq k+1 \Rightarrow \varnothing$.

B_i нь бас C тэй диагональ үүсгэхээс өөр аргагүй.

B_iC диагональ нь олон өнцөгтийг $(2i+1)$ ба $(4k+4-2i-1)$ олон өнцөгтөд хуваана. $2i+1 = 4k+4-2i-1$ $\quad 4i+2 = 4k+4 \Rightarrow \varnothing$.

Иймд $n=2k+1$ буюу $4k+2$ үед болохгүй.

~~n=2k~~ (C нь аль ч A_iB_j шулуун дээр оршихгүй.)

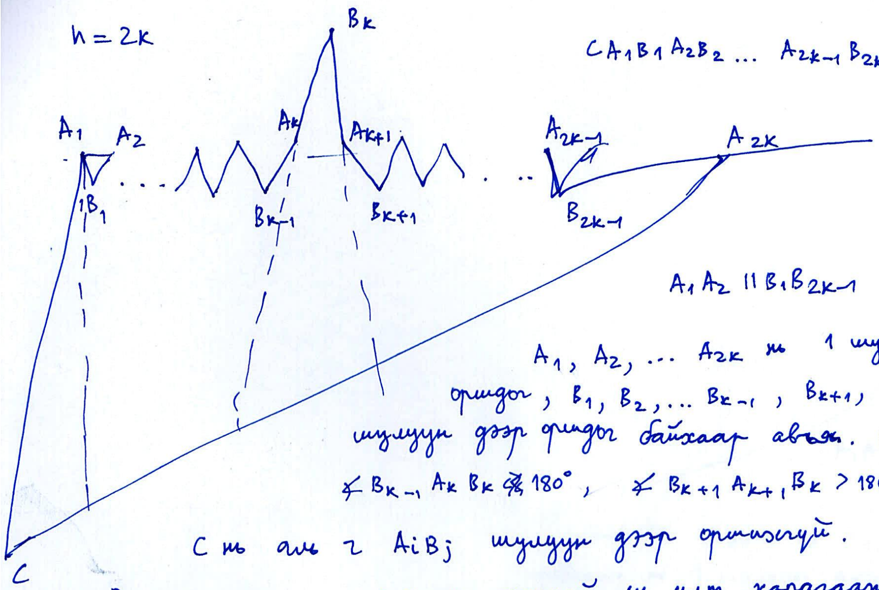
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр			Бодлого	Хуудас/Нийт	
5	4	5	A 1	2	2

$n = 2k$

$CA_1B_1A_2B_2 \dots A_{2k-1}B_{2k-1}A_{2k}$ $2n$ онцогт.



$A_1A_2 \parallel B_1B_{2k-1}$

$A_1, A_2, \dots A_{2k}$ нь 1 шулуун дээр оршдог, $B_1, B_2, \dots B_{k-1}, B_{k+1}, \dots B_{2k-1}$ нь 1 шулуун дээр оршдог байхаар авъя. B_k нь $\measuredangle B_{k-1}A_kB_k \cancel{<} 180°$, $\measuredangle B_{k+1}A_{k+1}B_k > 180°$ байх үед.

C нь аль ч A_iB_j шулуун дээр оршихгүй.

B_k нь аль ч диагональд орохгүй нь илт харагдаж байна.

Бид A_{2k}-г хангалттай хол аваад C-г A_iC диагональ нь $(\forall i)$ $2n$ онцогтийн гадна байхаар авч чадна.

~~A_i нь~~ A_iB_j диагональ нь олон өнцөгтийн дотор байх i, j нь зөвхөн $(k, k+1)$, $(k+1, k-1)$ A_kB_{k+1} нь олон өнцөгтийг 4 ба $4k-2$ олон өнцөгтүүдэд хуваана. $\Rightarrow \varnothing$.

$A_{k+1}B_{k-1}$ нь адилхан. ~~A_iC нь~~ Одоо B_iC үзъе. $(i \neq k)$.

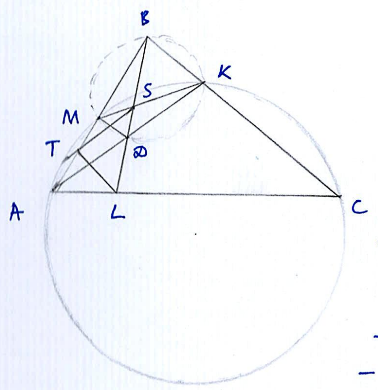
B_iC нь олон өнцөгтийг $2i+1$ ба $(4k+2-2i-1)$ олон өнцөгтүүдэд хуваана. $2i+1 = 4k+2-2i-1 \Rightarrow i = k \Rightarrow \varnothing$.

Иймд $n = 2$ үед л чадна. Ерөнхийдөө A_iA_j-нь болохгүй нь илт B_iB_j нь мөн адил.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A2

Шифр	Оноо	Хуудас/Нийт
545	7	1 1



Эхлээд T цэгийг AM хэрчим дээр оршино гэж баталъя. $\Rightarrow \angle ALM - \angle CBL > 0$ гэж батална. $AMKC$ багтсан 4 өнцөгт гэдгээс $\angle BKM = \angle MAL$ байна. $BKDM$ багтсан 4 өнцөгт учраас $\angle BKM = \angle BDM \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDM = \angle MAL \Rightarrow AMDL$ багтсан 4 өнцөгт. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ALM = \angle ADM \Rightarrow \angle SKD = \angle BDA -$

$- \angle SBK - \angle BKS = \angle ADM + \angle B\cancel{D}M - \angle \cancel{B}KS -$

$- \angle SBK = \angle ALM - \angle SBK > 0 \Rightarrow$ Батлагдав.

$TS \parallel AK$ гэж батална. $\Rightarrow \dfrac{BT}{TA} = \dfrac{BS}{SD}$ гэж батлахад хангалттай.

$\triangle ABD$ ба (MK) хувьд Менелейн теорем бичье.

$$\frac{BS}{SD} \cdot \frac{DK}{KA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{BT}{TA} \cdot \frac{DK}{KA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$ гэж баталъя.

$\angle C = \beta$, $\angle CBL = \alpha$, $\angle ABL = x$ гэе. $\Rightarrow \angle ALT = \alpha$

$\angle BLA = \alpha + \beta \Rightarrow \angle TLB = \beta$, $\angle A = 180^\circ - \alpha - \beta - x$ байна.

$\angle MBD = \angle MKD \Rightarrow \angle MKD = x$, $\angle BMK = \angle C = \beta \Rightarrow \angle BKS = 180^\circ - \alpha - \beta - x$.

$$\frac{BT}{\sin\beta} = \frac{TL}{\sin x}, \quad \frac{TA}{\sin\alpha} = \frac{TL}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta - x)} = \frac{TL}{\sin(\alpha + \beta + x)} \Rightarrow \frac{BT}{TA} = \frac{\sin(\alpha+\beta+x)}{\sin\alpha} \cdot$$

$\cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin x}$ байна. $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{\sin x}{\sin(180^\circ - \beta)} = \dfrac{\sin x}{\sin\beta}$. $\begin{cases} \angle BSM = \angle KSD \\ \angle MBS = \angle DKS \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BSM \sim \triangle KSD \Rightarrow \dfrac{DK}{MB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta - x)} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+x)}$

Үүнээс $\dfrac{BT}{TA} \cdot \dfrac{DK}{KA} \cdot \dfrac{AM}{MB} = 1$ болж $TS \parallel AK$ болох нь батлагдав.

$7^k \mid 1+2^n+3^n$ $k=1$ үед $n=2$ байна.

$k=2$ үед $n=4$ байна. Одоо $k>2$ буюу $k \geq 3$ үед.

$2^3 \equiv 1 (7) \Rightarrow 2^3-1 \equiv 0 (7) \Rightarrow (2^3-1)(2^{3\cdot 6}+2^{3\cdot 5}+\dots+1) \equiv 0 (49)$

$2^3 \equiv 1(7) \Rightarrow 2^{3\cdot k} \equiv 1^k = 1 (7) \Rightarrow 2^{3\cdot 6}+\dots+1 \equiv 0 (7) \Rightarrow 2^{21}-1 \equiv 0 (49) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{3\cdot 7} \equiv 1 (49)$. Ерөнхийдөө $2^k \equiv 1 (7^m)$ бол $2^{7k} \equiv 1 (7^{m+1})$ гэж

баталъя. $2^{7k}-1 = (2^k-1)(2^{6k}+2^{5k}+2^{4k}+2^{3k}+2^{2k}+2^k+1)$

$7^m \mid 2^k-1$. $(2^k)^6 \equiv (2^k)^5 \equiv (2^k)^4 \equiv (2^k)^3 \equiv (2^k)^2 \equiv 2^k \equiv 1 (7) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{6k}+2^{5k}+2^{4k}+2^{3k}+2^{2k}+2^k+1$ нь 7-д хуваагдана. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{m+1} \mid 2^{7k}-1 \Rightarrow 2^{3\cdot 7^{k-1}} \equiv 1 (7^k)$ болно. (1)

$3^3 \equiv -1 (7)$. Одоо $3^k+1 \equiv 0 (7^m)$ бол $3^{7k}+1 \equiv 0 (7^{m+1})$ гэж

баталъя. $3^{7k}+1 = (3^k+1)(3^{6k}-3^{5k}+3^{4k}-3^{3k}+3^{2k}-3^k+1)$

$7^m \mid 3^k+1$. $3^{6k} \equiv (-1)^6 (7)$ $3^{5k} \equiv (-1)^5 (7)$ $\dots$ $3^k \equiv (-1)^1 (7) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{6k}-3^{5k}+3^{4k}-3^{3k}+3^{2k}-3^k+1 \equiv (-1)^6-(-1)^5+(-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1$

$\equiv 7 (7) \Rightarrow 7^{m+1} \mid (3^k+1)(3^{6k}-3^{5k}+2^{4k}-3^{3k}+3^{2k}-3^k+1) = 3^{7k}+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Батлагдав $\Rightarrow 3^{3\cdot 7^{k-1}} \equiv -1 (7^k)$ (2)

$n = 3\cdot 7^{k-1}+1$ гэж сонгоё: (1)-р $2^{3\cdot 7^{k-1}} \equiv 1 (7^k) \Rightarrow 2^{3\cdot 7^{k-1}+1} \equiv 2 (7^k)$

(2)-р $3^{3\cdot 7^{k-1}} \equiv -1 (7^k) \Rightarrow 3^{3\cdot 7^{k-1}+1} \equiv -3 (7^k) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+2^n+3^n \equiv 1+2-3 = 0 (7^k) \Rightarrow$ Батлагдав.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 6 4 1 | Бодлого: B 1 | 2 оноо | Хуудас/Нийт: 1 2

$0 \le a_1, \dots a_n \le 1$.

$$\frac{1-a_1\dots a_n}{n} \le \frac{1}{1+a_1+a_2+\dots+a_n} \iff n \ge (1-a_1a_2\dots a_n)(1+a_1+\dots+a_n)$$

$$n \ge 1+a_1+\dots+a_n - a_1\dots a_n(a_1+\dots+a_n) - a_1\dots a_n$$

$n=1$ үед $1-a_1 \le \frac{1}{1+a_1} \iff 1-a_1^2 \le 1 \iff 0 \le a_1^2$ буюу үнэн.

n-р индукцлаа. $1, 2, \dots n$ үед үнэн гээд

$n+1$ үед баталъя. $1-a_1\dots a_{n+1} \le \frac{n+1}{1+a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}$

$a_1+\dots+a_{n+1} > n$ биш бол $1 \ge 1-a_1\dots a_{n+1}$, $1+a_1+\dots+a_{n+1} \le n+1$

гээд үнэн. $\Rightarrow a_1+\dots+a_{n+1} > n \Rightarrow a_1+\dots+a_n > n-1$

$$1-a_1\dots a_n \le \frac{n}{1+a_1+\dots+a_n} \Rightarrow a_{n+1} - a_1\dots a_{n+1} + 1 - a_{n+1} \le$$

$$\le \frac{n\cdot a_{n+1}}{1+a_1+\dots+a_n} + 1 - a_{n+1} \le \frac{n+1}{1+a_1+\dots+a_n+a_{n+1}} \quad a_1+\dots+a_n > n-1$$

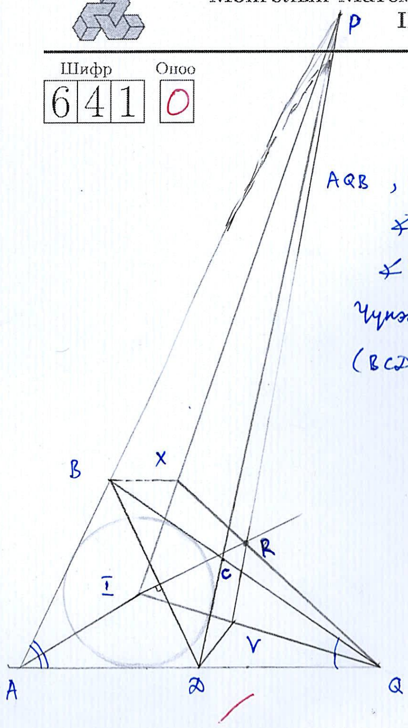
$$\frac{n\cdot a_{n+1}}{1+a_1+\ldots+a_n}+1-a_{n+1}\le\frac{n+1}{1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}}$$ гэж баталъя.

$$\frac{n\cdot a_{n+1}}{1+a_1+\ldots+a_n}\le\frac{n+1}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}+a_{n+1}-1$$

$$\frac{n+1}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}<1\Rightarrow\frac{n+1-n\mp a_{n+1}}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}-a_{n+1}-n}\le\frac{n+1}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}\cancel{+a_{n+1}-1}$$

$$\frac{n\cdot a_{n+1}}{1+a_1+\ldots+a_n}\le a_{n+1}-1+\frac{1-a_{n+1}}{a_1+\ldots+a_n-n+1}$$

Яг 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгтийн тоо $m(P)$ гэе. (Хамгийн ихдээ).



AQB, APD гурвалжны багтсан тойрог ω учраас

$\measuredangle API = \measuredangle DPI$, $\measuredangle AQI = \measuredangle BQI$ болно.

$\measuredangle BDX = \measuredangle PDX$, $\measuredangle DBY = \measuredangle QBY$, $\measuredangle BCI = \measuredangle DCI$

Учраас DX, BY, CI шулуунууд 1 цэгт огтлолцоно.

(BCD гурвалжны багтсан тойргийн төв.)