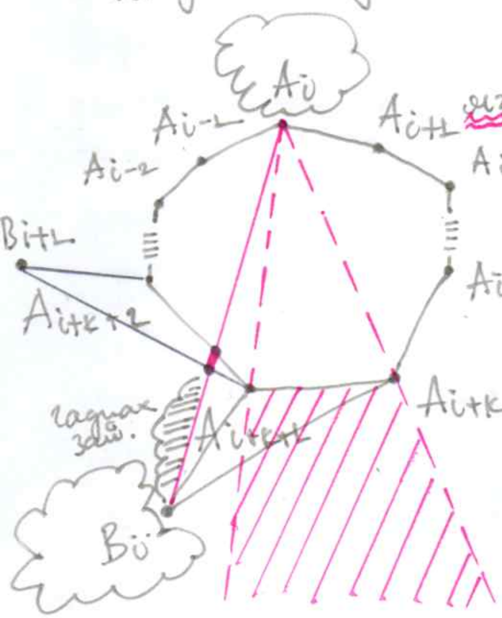
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

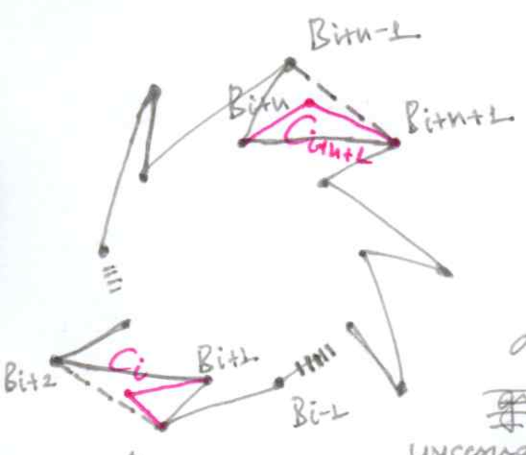
Шифр 507 Бодлого A1 4+3 оноо баярла Хуудас/Нийт 1 3

Хэрэв үл олон өнцөгт гүдгэр бол дурын гол диагоналий нь татахад бодлогын нөхцлийг биелүүлэх тул гүдгэр биш гэж үзье. $n = 2k+1$ байг ($k \geq 1$). Тэгвэл $2k+1$ оройтой гүдгэр биш олон өнцөгт авч үзье. Тэгвэл оройнуудыг нь $A_1 A_2 A_3, \ldots, A_{2k+1}$ гэе. Тэгвэл $A_{i+k}A_{i+k+1}$ талыг A_i оройн эсрэг орших тал гэж тодорхойлъё. Энэ олон өнцөгтөө "A" гэж нэрлэвэл A-ийн гадна $A_{i+k}A_{i+k+1}$ талаар адилхан хийсэн Δ байгуулаад 3-дахь орой нь B_i гэж нэрлэх юм. Тэгэхдээ B_i нь $[A_iA_{i+k})$ ба $[A_iA_{i+k+1})$ цацрагуудад хаагдсан хэсэгт агуулагдахгүй байхаар байгуулах юм.



Энэ мэтчилэн $i = \overline{1,2,\ldots,2k+1}$ бүрийн хувьд ганцхан B_i-гүүдийг байгуулбал бидэнд $2n$ оройтой олон өнцөгт үүсэх ба шинээр үүссэн Δ-үүдийн шинээр үүссэн 2 талууд нь үл олон өнцөгтийн ~~талын~~ талын тал нь болох, Өөрөөр хэлбэл ~~$A_1A_2 \ldots A_{2k+1}$~~ A олон өнцөгтийн талуудын оройгоор үүсэх $2n$ орой бүхий "ОД" хэлбэрийн олон өнцөгт юм. Энэ үл олон өнцөгтийг 2 тэнцүү тооны оройтой 2 олон өнцөгтөд хуваах диагональ-ууд нь A_iB_i ($i = \overline{1,2,\ldots,2k+1}$) байх бөгөөд энэ бүгд үл олон өнцөгт дотроо бүхэлдээ агуулагдахгүй нь ойлгомжтой. Учир нь A_iB_i нь ~~$A_{i+k+2}A$~~ A олон өнцөгтийн $A_{i+k+1}A_{i+k}$ талаас ялгаатай өөр талыг огтлох ~~бөгөөд~~ бөгөөд энэ тэр талаар адилхан хийсэн байгуулагдсан Δ-ыг огтлох ба энэ тэр Δ-ын орой B_j гэвэл $B_j \neq B_i$ учир байгуулагдсан $2n$ ~~орой~~ оройтой олон өнцөгтөд агуулагдахгүй хэсэг олдох юм. Өөрөөр хэлбэл $[A_iB_i)$ цацраг нь $\Delta A_{i+k+1}A_{i+k}B_i$-ийн огт дайраагүй бөгөөд өөр нэгэн ганцхан Δ-ийг дайран гарсан ба тэр Δ-ын орой нь B_i биш ч бол бидний олон өнцөгтийн гадуур гарах юм. Энэ n нь сондгой бол бодлогын шийд болох гадаахгүй гэдэг нь байгуулагдлаа.

Одоо бид n нь сондгой үед бодлогын нөхцөлийг хангадаггүй байгуулалт байгуулж чадах боловч. Энэ сондгой байгуулалтыг нь авч үзье. Уг байгууламжид A олон өнцөгт зөв байх ба ~~бай~~ ширээр гадна талд нь байгуулагдсан Δ-ууд бүгд ижилхэн байх ба дээрээс нь уг Δ-ууд оройн эрэмбийн ~~..~~ дагуу нэг ~~...~~ шийтэн хадайсан байх байгууламжийг авч үзээд энэ олон өнцөгтөө "B" гэж нэрлэе. Тэгээд оройнуудыг нь $B_1, B_2, \dots, B_{4k+2}$ гэе! ~~Тэгээд B_iB_{i+1} ба $B_{i+n}B_{i+n+1}$ гэсэн 2 талаа сонгоё.~~ ~~Тэгээд B_i ... суурь хийсэн Δ байгуулах юм. Тэгэхдээ 3-дахь оройнуудыг харгалзан C_i ба C_{i+n} гэж нэрлэе.~~ Тэгээд хэрэв дотоод өнцөг нь 180°-аас бага бол гадаад орой, их бол дотоод орой гэе! Тэгээд B_i гэх гадаад орой ~~x~~ сонгож авбал B_{i+n} нь дотоод байна. (Олон байгууламжаас хялбархан харж болно) Тэгээд B_iB_{i+1} ба $B_{i+n}B_{i+n+1}$ гэсэн 2 талыг үзээд энэ 2 талаар суурь хийсэн Δ-ууд байгуулаад 3-дахь оройнуудыг харгалзан C_i ба C_{i+n+1} гэе! Тэгэхдээ $\triangle B_iB_{i+1}C_i$ нь $\triangle B_{i-1}B_iB_{i+1}$-тэй огтлолцохгүй, $\triangle B_{i+n}B_{i+n+1}B_{i+n+2}$ нь $\triangle B_{i+n}B_{i+n+1}C_{i+n+1}$-тэй огтлолцохгүй байхаар байгуулах юм. Тэгэхдээ C_i нь $\triangle B_iB_{i+1}B_{i+2}$ дотор C_{i+n+1} нь ~~B_{i+n}~~ $\triangle B_{i+n}B_{i+n+1}B_{i+n-1}$ дотор байхаар авах юм. Тэгээд B_iB_{i+1} ба



$B_{i+n}B_{i+n+1}$ 2-ийг арилгахад $4(k+1)$ оройтой олон өнцөгтийг үүсгэх боловч оройн тоог 2 тэнцүү хуваах диагоналиуд нь B_jB_{j+n} $(j=1,3,\dots,2k+1)$ хэвээрээ байх ба дээрээс нь C_iC_{i+n+1} нэмэгдсэн юм. $C_i \neq B_{i+2}$ ба $C_{i+n+1} \neq B_{i+n-1}$ учир B_jB_{j+n} диагональ бүр бүхлээрээ B олон өнцөгтөд агуулагдахгүй ~~хэвээр байх юм. Харин $C_{i+n+1}C_i$ диагональ нь бүхлээр B-д ...~~ учир шинээр үүссэн нь 2 мөн адил тийм чанартай байх ба $C_i \neq B_{i+2}$ ~~..~~ учир $C_{i+n+1}C_i$ диагональ нь мөн адил бүхлээрээ уг олон өнцөгтөд агуулагдаж чадахгүй юм. (Энэ сондгой үед хийсэн тайлбараас хялбархан харж болно) Эндээс бид n нь ... мөн адил бодлогын нөхцөлийг хангадаггүй

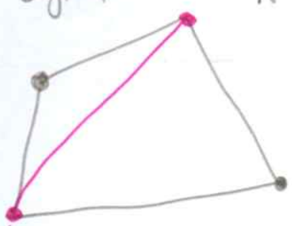
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

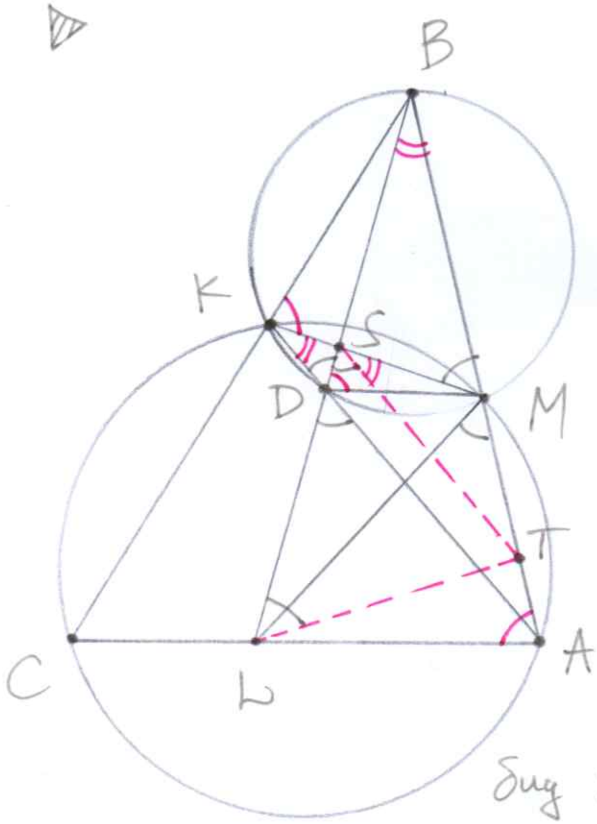
Шифр: 5 0 7 | Бодлого: A 1 | Хуудас/Нийт: 3 3

Иймэрхүү бид 4-с их олонг ~~...~~ тэгш тооны хувьд сөрөг хэмжээ байгуулсан ба одоо $2n=4$ үед буюу $n=2$ үед . падиа гэж батлъя. Гүдгэр байвал диагоналыг нь татаад хангалттай. Гүдгэр биш байг. Тэгвэл өмнөх тодорхойлолт ёсоор дотоод орой ~~...~~ 1 л ширхэг байх бөгөөд уг орой бусад бүх оройтой холбоход дүрс дотроо байх тул уг ~~оройтой ч~~ орой эсрэг орших оройтой шууд холбоход хангалттай. Иймэрхүү $n=2$ үед л шийдтэй өөр шийдгүй болно. $\triangle$

Зураг 1. (Гүдгэр)



Зураг 2. (Гүдгэр биш).



Бодлогын нөгөө талаас нь $ST \parallel KA$ байхаар T цэгийг AB дээр аваад $\angle TLA = \angle LBC$ гэж баталъя.

$\angle BKM = 180° - \angle MKC = \angle CAM = \angle LAT$ тул бид $\triangle SBK \sim \triangle TLA$ гэж баталахад болно. $\frac{TA}{KS} = \frac{MT}{MS}$ байна. Нөгөө талаас $\angle MKD = \angle MBD$ (Нэг нумд тулсан) $\angle MBD = \angle MKD = \angle MKA = \angle MST$ болно. ($ST \parallel KA$ тул) Эндээс $\triangle MST \sim \triangle SBT$ байна. Иймээс $\frac{MT}{MS} = \frac{ST}{BS}$ байна. Эндээс бид $\frac{ST}{BS} = \frac{TA}{KS}$ гэж олов. Одоо $ST = LT$ гэж баталъя. $\begin{cases} \angle BKM = \angle BDM \\ \angle BKM = \angle LAT \end{cases}$ гэдгээс D, L, A, M нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle ADL = \angle AML$ болно. Нөгөө талаас $\angle ADL = \angle TSL$ ($ST \parallel KA$ тул) мөн. $\angle AML = \angle TML$ болж $\angle TML = \angle TSL$ болсон тул S, L, T, M нэг тойрог дээр ~~оршино~~. оршино. Нөгөө талаас $\angle TSL = \angle ADL = \angle KDB = \angle KMB = \angle SMB = 180° - \angle TMS = \angle SLT$ болж $\triangle STL$ нь адил хажуут. Бид эндээс $\cancel{\frac{LT}{BS} = \frac{MT}{}}$ $\frac{LT}{BS} = \frac{TA}{KS}$ гэж харууллаа. Нөгөө талаас $TMSL$ нь тойрогт багтсан тул $\angle ATL = 180° - \angle LTM = \angle MSL = \angle KSB$ болж ТӨТ шинжээр $\triangle ATL \sim \triangle KSB$ болсон тул $\angle ALT = \angle KBS = \angle CBL$ болж батлагдлаа. Бодлогын шинжүүг өгөгдлийн өөрчлөн бодох нь буруу зүйлгүй болно.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A3

Шифр 507 Оноо 1 +1

Хуудас/Нийт 1 1

~~$n=4$ үед. $1+2^n+3^n = (2^n+5)+(3^n-4)$ гэж бичиж болох юм.~~

~~$2^n+3^n+1 = (2^n+m)+3^n$~~

~~$2^n+3^n+1 = (2^n+m)+(3^n-(m-1))$ гэж бичье. Тэгвэл $m-1$ ба m ба оир нь [illegible] тооны [illegible] байгаа байх~~

$1+2^n+3^n = (3^n-1)+2(2^{n-1}+1)$ гэж бичье.

$2^{n-1}+1$ ба 3^n-1 нь 2-уулаа 7-д хуваагдаг байх n тоо олддог байг. Тэгвэл. зэрэг оргох лемм. ёсоор

$k = \| (2^{n-1})^m + 1 \|_7 = \| 2^{n-1}+1 \|_7 + \| m \|_7$. ~~байх ба. Энд~~

$k = \| (3^n)^m - 1 \|_7 = \| 3^n+1 \|_7 + \| m \|_7$ байхаар n тоо олдохыг

батлахад хангалттай.

Хэрэв $1+a_1+a_2+\dots+a_n \le n$ бол $\frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \ge \frac{1}{n} \ge \frac{1-a_1a_2\cdots a_n}{n}$ болж тэнцэтгэл биш хялбархан батлагдах тул эсрэгээр нь $1+a_1+\dots+a_n \ge n$ (1) гэж үзье. Нөгөө талаас $a_1+a_2+\dots+a_n \le n$ (2) тэнцэтгэл биш үнэн юм.

$$\frac{1-a_1a_2\dots a_n}{n} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \Rightarrow 1+a_1+\dots+a_n \le n+a_1\dots a_n(1+a_1+\dots+a_n)$$

Энд (1)-ийг ашиглавал $1+a_1+a_2+\dots+a_n \le n+(a_1\dots a_n)\cdot n$. ~~дахин~~

~~(2)-ийг ашиглавал. $1+n \le n+(a_1a_2\dots a_n)\cdot n$ -ийг батлахад хангалттай $\frac{1}{n} \le a_1a_2\dots a_n$ -ийг батлах болно. Энд~~

~~$n \ge a_1+a_2+\dots+a_n \ge n-1$. байх юм.~~

$$\frac{1+(a_1+\dots+a_n)}{n} \le 1+(a_1a_2\dots a_n)$$ -ийг батлах болно.

Энд $\boxed{n \ge a_1+a_2+\dots+a_n \ge n-1}$ байх юм. ~~Иймээс~~ тэнцэтгэл биш $\boxed{a_i=0}$ ба $\boxed{a_j=1}$ ($j=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n$) байх үед тэнцэлдээ хүрнэ.

~~$a_i=0$ байх i олдсон байг. Тэгвэл~~

~~$\frac{1+(a_1+\dots+a_n)}{n} \le \frac{1+(n-1)}{n} \le 1 \le 1+(a_1a_2\dots a_n)$~~

~~болж батлагдах нь.~~

$\boxed{a_i=0 \text{ байх } i \text{ дугаар олдсон байг}}$

Тэгвэл

$$1+(a_1a_2\dots a_n)=1 \ge \frac{1+(a_1+\dots+a_n)}{n}$$ ба энд

$n \ge a_1+\dots+a_n$ гэдгийг ашиглавал $a_i=0$ тул

$a_1+a_2+\dots+a_n \le n-1$ болж. $\frac{1+(a_1+\dots+a_n)}{n} \le \frac{(n-1)+1}{n}=1$

$1 \geq a_1, a_2, \ldots, a_n > 0.$ $n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n-1$

$1 + (a_1 + \ldots + a_n) \leq n + a_1 a_2 \ldots a_n (1 + a_1 + \ldots + a_n).$

~~Энд $a_1 + \ldots + a_n \leq n$ гэдгийг ашиглавал.~~

~~$1 \geq a_1 a_2 \ldots a_n (1 + a_1 + \ldots + a_n)$ болох юм.~~

~~Энд дахин $1 + a_1 + \ldots + a_n \geq n$ гэдгийг ашиглавал.~~

~~$\boxed{\frac{1}{n} \leq a_1 a_2 \ldots a_n}$ гэж батлахад болно.~~

~~Индукцлэе!~~
~~$n=2$ үед. $\frac{1}{2} \leq a_1 a_2$.~~

~~Индукцлэе.~~

~~$n=1$ үед. 1~~

Индукцлэе!

$n=1$ үед. $1 + a_1 \leq 1 + a_1(1 + a_1).$

$0 \leq a_1^2$ болж үнэн.

~~$n=k$ ба $n<k$ байх бага~~

$n = n$ ба n-с бага бүх үед үнэн гэж үзээд $n+1$ үед батлъя.

$1 + (a_1 + \ldots + a_{n+1}) \leq (n+1) + a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n+1} (1 + a_1 + \ldots + a_{n+1}).$

Энд $\begin{cases} n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n-1 \\ n+1 \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geq n. \end{cases}$ тул $1 \geq a_{n+1} \geq 1$ болж. $a_{n+1} = 1$ болох ба.

Эндээс $(1 + (a_1 + \ldots + a_n)) + 1 \leq (n) + 1 + ((a_1 a_2 \ldots a_n)(1 + a_1 + \ldots + a_n)) +$
$+ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$ болж өмнөх

алхмаар $n + a_1 a_2 \ldots a_n (1 + a_1 + a_2 \ldots + a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

тул. $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \geq 0.$ болохыг батлахад хүрэх

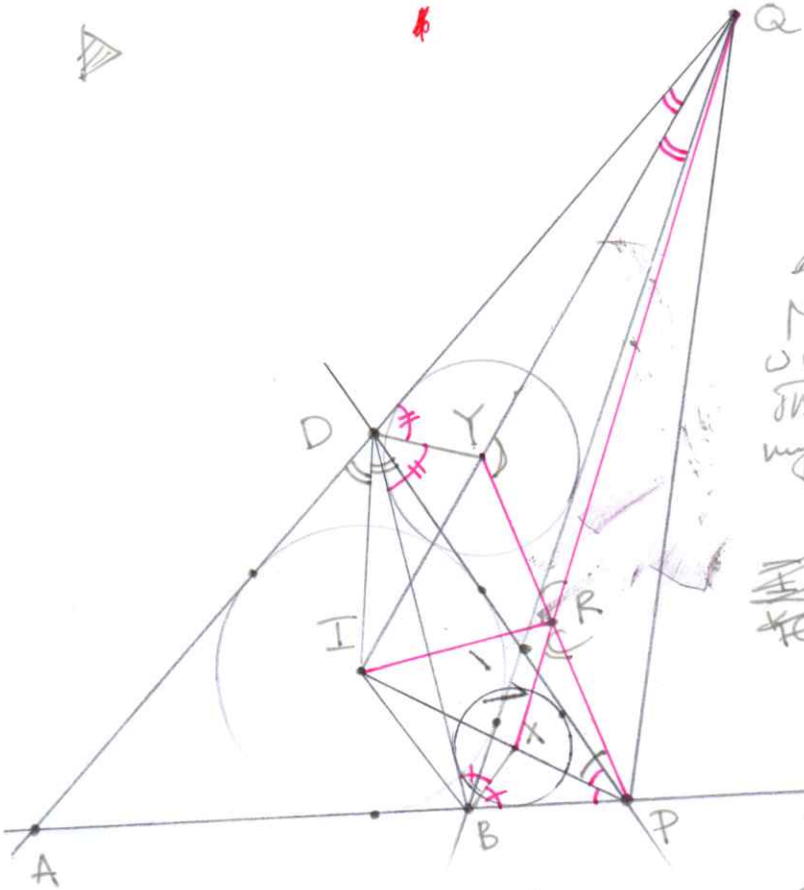
ба энэ нь илт үнэн тул индукцийг батлагдав. △

Эхлээд $n(P) \leq 20$ ~~гэж~~ харуулъя. Аль нэг ~~баганад~~ баганын хар нүднүүдийг дээрээс нь эхлээд хос хосоор нь 1 эрэмбийн тэгш өнцөгтүүдэд хийгээд байвал. уг баганын тэгш тооны хар нүд байсан бол нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгт уг баганад байхгүй. Харин сондгой тооны хар нүд байсан бол нэг ширхэг тэгш өнцөгт нэг ширхэг хар нүд агуулна.

$\Rightarrow$ багана бүрд хамгийн ихдээ нэг ширхэг нэгээс олонгүй хар нүд агуулах тэгш өнцөгт байх тул $n(P) \leq 20$.

Одоо 20-с их байхгүй харуулъя.

20×20 дүрсэн 1 мөрийг авъя. Одоо энэ мөрөнд 0 юмуу 1 ширхэг хар нүд байвал нүд бүхэнд нь 1 тэгш өнцөгт. Түүнээс олон байвал бас тэгш тооны хар нүдтэй бол бүх нүднүүдээ 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд хуваах гадна. Сондгой тооны хар нүд байвал хамгийн баруун талынх нь хар нүд ба түүнээс баруун талын бүх хоосон нүднүүдийг 1 тэгш өнцөгт болгоод үлдсэн нүдээ 2 хоёр хар нүдтэй тэгш өнцөгтөд хуваах гадна. Иймд 1 мөрийг дангаар нь хамгийн ихдээ Нэгээс олонгүй хар нүдтэй хар нүдгүй тэгш өнцөгт Хоёр хуваах



Менелайн теорем ёсоор:

$$\frac{IY}{YQ}\cdot\frac{QR}{RX}\cdot\frac{XP}{PI}=1$$

$\triangle PBD$ ба $\triangle QBD$-д багтсан тойргийн радиусуудыг харгалзан r_1, r_2 гэе. ω тойргийн радиусыг r гэе.
Бидэнд P нь гомотетийн төв болох тул $\frac{XP}{PI}=\frac{r_1}{r}$ байна.

$\cancel{\frac{IY}{YQ}}$ $\cancel{\frac{IY}{YQ}=\frac{QI+Y}{YQ}}$ $\frac{YI}{YQ}=\frac{QI-QY}{YQ}=$

$\cancel{YQ}$ $=\frac{QI}{YQ}-1=\left(\frac{r}{r_2}-1\right)$ байна.

Эндээс $\cancel{\frac{QR}{RX}=}$ $\frac{RX}{QR}=\left(\frac{r}{r_2}-1\right)\left(\frac{r_1}{r}\right)$ болно.

Үүний адилаар $\cancel{\frac{PR}{RY}=}$ $\frac{YR}{PR}=\left(\frac{r}{r_1}-1\right)\left(\frac{r_2}{r}\right)$ болно.

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{YR}{PR}+\frac{r_2}{r}$; $\frac{r_1}{r_2}=\frac{RX}{QR}+\frac{r_1}{r}\Rightarrow\left(\frac{r_1}{r}+\frac{RX}{QR}\right)\left(\frac{r_2}{r}+\frac{YR}{PR}\right)=1$

болов.