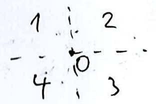
$n = 2$ үед л татах боломжтой буюу $n > 2$ үед бодлогын нөхцөлийг хангах диагоналийг татаж болохгүй $2n$ оройтой олон өнцөгт олдоно.

$n = 2$ үед татаж болохыг баталъя.

Өгөгдсөн $\forall$ 4 оройтой олон өнцөгтөө 2 шулуунаар 1 орой нэгэнт байхаар хуваагдаад шулуунуудынхаа огтлолцлын цэгийг O гэе. (3 орой нь 1 шулуун дээр оршихгүй үед)

* 3 орой нь нэг шулуун дээр байвал бол мэдээж тийм диагональ татаж болно;

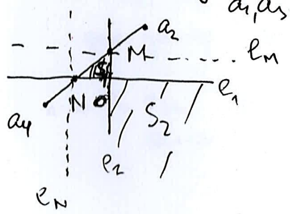


Олон өнцөгтийнхөө оройг холбогдсон дарааллаар нь a_1, a_2, a_3, a_4 гэж дугаарлая.

$a_1 \in 1$ $a_2 \in 2$ $a_3 \in 3$ $a_4 \in 4$ байг. (Өөр дараалалтай байх боломжтой.)

(a_2a_4) - диагональ дүрсийнхээ гадна оршвол $\Delta a_2Oa_4 \ni a_1$ эсвэл $\Delta a_2Oa_4 \ni a_3$ байна.

(a_1a_3)-ийн хувьд мөн адил. ~~байх ба (a_2a_4)-ийн a_2a_4-ийн 2 шулуунтай огтлох цэгүүдийг M, N гэвэл MN-ийн нэг талд a_1a_3 нь байна ⇒~~



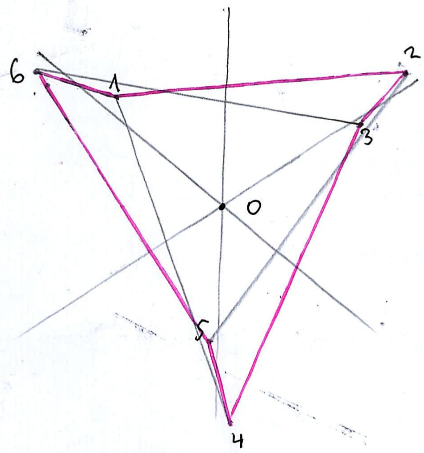
S_1-д байх цэг, O, S_2-д байх цэг тэр зааглагдсан талбайд байх цэг l_M-ээс доош l_N-ээс баруун тийш байх тул $a_2 = M$, $a_4 = N$ байсан ч тэр талбайд a_2, a_4 байх боломжгүй $\Rightarrow$ (a_1a_3), (a_2a_4)-ийн дор хаяж нэг нь дүрс дотроо оршино.

\+ $l_M \parallel l_1$, $l_N \parallel l_2$.

$M \in l_M$ $N \in l_N$

$a_2a_4 \cap l_2 = M$ $a_2a_4 \cap l_1 = N$.

Харин $n > 2$ үед $\Delta a_i O a_{i+n}$ дотор өөр a орой оршдог байхаар байгуулах боломжтой.



$n = 3$ дээрх жишээ.

$\forall$ O цэгийг дайрсан n шулуунаар хавтгайг задлаад 1, 2, …, 2n гэж цагийн зүүний дагуу дугаарлаад тэр i-р хэсгээс i-р орой болох $\forall$ цэгийг сонгоод i, i+1 -ийг холбоход үл огтлолцох талуудтай олон өнцөгт үүснэ.

i-р орой A_i-р тэмдэглэе.

~~1-р $\forall$ O тойгоо ойрхон, n+1-р орой~~ $\to \Delta$. орой n+2-г

A_1-ээ O тойгоо ойрхон, $A_1 A_{n+1}$ нь n+2-р хэсгийн ~~шон~~ хангалттай ~~хо~~ огтлолдог байхаар аваад $A_1 A_{n+1}$-д ойрхон $\Delta A_1 O A_{n+1}$ дотор байх A_{n+2} цэг, $A_{n+2} A_2$ нь 3-р хэсгийн ~~шон~~ хангалттай огтлолцох байх A_2 цэг аваад $\Delta A_2 O A_{n+2}$ ~~дээр~~ дотор байх A_3 цэг аваад ...

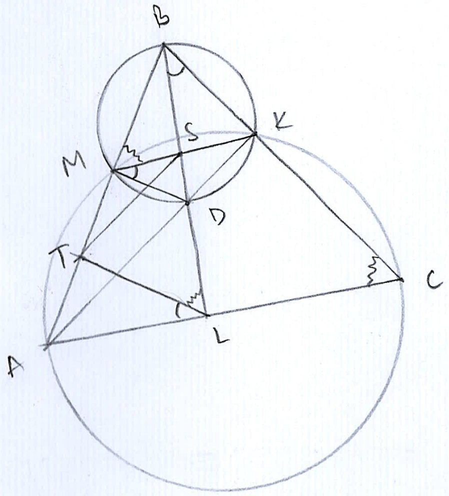
$\Delta O A_n A_{2n}$ дотор A_1 байтал байхаар ~~шон~~ A_{2n} цэг авахад болно.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A2

Шифр: 552 Оноо: 7

Хуудас/Нийт: 1 1



AMKC – багтсан $\Rightarrow \angle MKB = \angle A$

мөн BMDK – багтсан $\Rightarrow \angle MDB = \angle MKB$

$\Rightarrow \angle MDB = \angle A \Rightarrow$ MALD – багтсан (1)

AMKC – багтсан $\Rightarrow \angle BMK = \angle C$

мөн BMDK – багтсан $\Rightarrow \angle LBC = \angle DMK$

$\Rightarrow \angle BMD = \angle LBC + \angle C$ болох ба

(1)-ээс $\angle BMD = \angle DLA$ тул

$\angle LBC + \angle C = \angle ALT + \angle TLB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (бодлогын нөхцөлөөр) $\angle C = \angle TLB$ болно

мөн $\angle C = \angle BMK$

$\Rightarrow \angle BMK = \angle TLB \Rightarrow$ MSLT – багтсан (2)

(1)-ээс $\angle MAD = \angle MLD$

(2)-оос $\angle MTS = \angle MLS$

$\Rightarrow \angle MAD = \angle MLD = \angle MTS \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MAK = \angle MTS \Rightarrow$

$\Rightarrow TS \parallel AK$ болж батлагдлаа.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B1

Шифр 669 Оноо 2

Хуудас/Нийт 1 1

$a_i = 0$ байх $i \in \overline{1,n}$ олддог бол:

$$\frac{1}{n} = \frac{1 - a_1 a_2 \dots a_n}{n}, \quad \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \geq \frac{1}{1+1\cdot(n-1)+0} = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-a_1a_2\dots a_n}{n} \leq \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n}$$ болж батлагдана.

$\Rightarrow$ мөн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь

$$\{a_1,\dots,a_n\} = \{\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1},0\}$$ гэж гарна.

Мөн $a_1+\dots+a_n \leq n-1$ үед

$$\frac{1-a_1a_2\dots a_n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n}$$ - ~~нь~~ илэрхий тул

$a_1+\dots+a_n > n-1$ гэж үзэж болно (*)

n-ээр индукцлэе ((*) нөхцөлийг хангах $a_1,\dots,a_n$-н хувьд)

$n=1$ үед $\frac{1-a_1}{1} \leq \frac{1}{1+a_1} \Leftrightarrow 1-a_1^2 \leq 1$ тул илэрхий.

~~$n=m-1$~~ $n-1$ үед үнэн байг.

$$\frac{1-a_1\dots a_{n-1}}{n-1} \leq \frac{1}{1+a_1+\dots+a_{n-1}} \quad \Big| \cdot \frac{n-1}{n}$$

$(a_n \leq 1)$

$$\frac{1-a_1\dots a_{n-1}a_n}{n} \leq \frac{1-a_1\dots a_{n-1}}{n} \leq \frac{1}{(1+a_1+\dots+a_{n-1})\cdot\frac{n}{n-1}} \leq$$

$(a_1+\dots+a_{n-1} > n-2)$

$$\leq \frac{1}{(1+a_1+\dots+a_{n-1})+\frac{1}{n-1}(1+a_1+\dots+a_{n-1})} \leq \frac{1}{(1+a_1+\dots+a_{n-1})+\frac{1}{n-1}\cdot(n-1)} \leq$$

$(1 \geq a_n)$

$$\leq \frac{1}{(1+a_1+\dots+a_{n-1})+a_n} = \frac{1}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}$$ болж индукц-н шилжилт батлагдав.

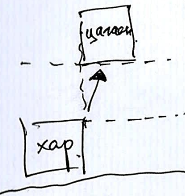
Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B2

Шифр: 669 | Оноо: 7 | Хуудас/Нийт: 1 | 1

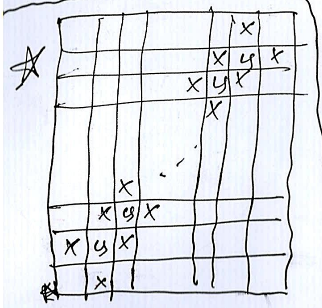
Будагдсан нүднүүдээ хар, цагаанаар ээлжлэн будъя.

* хар-р будагдсан нүдтэй ~~тэгш ончтод~~ оруулахад ~~өөр будагдсан нүд ордоггүй бол цагаанаар мөн адилаар~~ хараар будъя.



Доод, баруун булангийн будагдсан нүдийг хараар будаад, энэ будагдсан нүдтэй нэг тэгш өнцөгтөд оруулахад 2-оос олонгүй будагдсан нүд байхаар оруулж болох өөр будагдсан нүдийг ~~нүднүүдийн~~ цагаанаар будна. Энэ цагаанаар будагдсан нүднүүдийн хувьд мөн адил нохцол биелүүлэх нүднүүдийн хараар ~~будна~~ будаж гэж зэрэг будагдсан нүднүүдээ ээлжлэн будна. Хар, цагаанаар зэрэг будагдаж болох нэг нүд хар, цагаанаар зэрэг будагдаж болох ба тэр нүдийг алаг нүд гэвэл

$N(P) \le$ ~~|хар - цагаан|~~ $|$хар нүдний тоо $-$ цагаан нүдний тоо$|$ $-$ алаг нүдний тоо байна. (алаг нүд - хар, цагаан аль аль нь болох гадвартай тул хар цагааны зөрүүг багасгана)



ц-н тоо - 18
x-н тоо 38 } =?

=> $N(P) = 20$ байх байгуулалт.

Нэг мөр бүрийн хувьд хар-н тоо хар, цагаан цагаанаасаа ихдээ нэг ээлжлэн байрлах нь шээр хийг тул 1-ээр илүү байна => $N(P)$ max нь 20.

(Будсан нөхцлийн дагуу |хар|...|хар| V |цагаан|...|цагаан| (өөр будагдсан нүд байхгүй) гэж байрлах боломжгүй. Аль нэг нь алаг эсвэл хар, цагаан л байна)

* хар, цагаан нь будагдсан нүднүүдээ будсан өнгө болно.

*

2	3	4
1	5	6

будалт нь: 1-хар, 2,5 будагдаагүй, 3 будагдсан бол 3-цагаан, 2,5-ийн нэг нь будагдсан бол (2 бол 3,4-ийн өнгө 1-тэй ч хамаарна) (5 бол 6,4-ийн өнгө ч хамаарна)