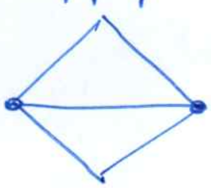
$n \geq 2$ байх бүх n-ээр индукцлье. [Мон $2n$ зөрүүтэй оройн тоотой 2 олон өнцөгт байг гэж баталъя.
n-ээр индукцлье. [Мон $2n$ зөрүүтэй оройн тоотой 2 ОӨ-д хуваагдаг диагональ] тэнц баталъя (*)

1°) Суурь тохиолдол $n = 2$ үед.

$2n = 4$ өнцөгт хувьд бүх өнцгүүдийн нийлбэр $360°$ ба

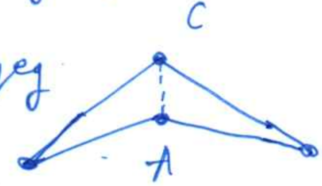
$360° = 180° \cdot 2$ тул 2 болон түүнээс олон өнцөг нь хотгор байж чадахгүй. (Учир нь хотгор өнцөг нь $180°$-аас их байдаг) Иймд энэ 4 өнцөгт гүдгэр 4 өнцөгт байна эсвэл яг 1 өнцөг нь л хотгор байна.

Гүдгэр өнцөгт бол аль ч диагональ нь дотроо орших тул



аль нэг диагоналийг авахад 4 өнцөгт маань 2 ш гурвалжинд хуваагдана. Энд гүдгэр үед батлагдав.

Яг нэг орой нь хотгор үед



(A орой хотгор байг)

Энд AC диагональ татахад B $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ гэсэн D 2 гурвалжин үүсэх ба $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABCD}$ байх нь илэрхий тул AC диагональ нь 4 өнцөгтөд бүхэлдээ багтана. Энд суурь батлагдав. Мон аль нэг талын хувьд (*) үнэн.

2°) Одоо $n = k$ үед буюу $2k$ оройтой олон өнцөгтөд бодлогын нөхцөл хангах диагональ татаж болно гэж үзээд

3°) $n = k+1$ үед буюу $2k+2$ оройтой үед бодлогоо баталъя.

~~Ку~~ ~~Өн~~ Олон өнцөгтийн бүх өнцгийн ~~хэмжээн~~ нийлбэр

$((2k+2)-2) \cdot 180°$ учраас ядаж ~~3~~ гүдгэр орой олдоно.

Үүнийг баталъя. Эсрэгээр нь х/ихдээ 2 гүдгэр оройтой буюу ядаж $(2k+2)-2 = 2k$ ш хотгор оройтой гэе. Энд бүх

($180° \cdot 2k$) аас их болж

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

Шифр: 5 0 3 Бодлого: A 1 Хуудас/Нийт: 2 2

~~Энд аль г тохиолдолд 2 талдаа 1,1 гүдгэр орой агуулдаг гол диагональ олдоно.~~

Үг 3 орой A, B, C гэе.

Үндсэн $2n-3$ оройн олонлог нь T байг.

Энд $T\cup A$; $T\cup B$; $T\cup C$ оройнуудаас

үүсэх ~~агуулдаг~~ ~~олгд~~ олон өнцөгтүүдийн хувьд

индукцийн өмнөх алхмаа ашиглавал.

XX', YY', ZZ' диагональ үүсдэг гэе.

Ө/Х XX', YY', ZZ' нь дээр 3 О/Ө-д б/нөхцөл хангадаг байг.

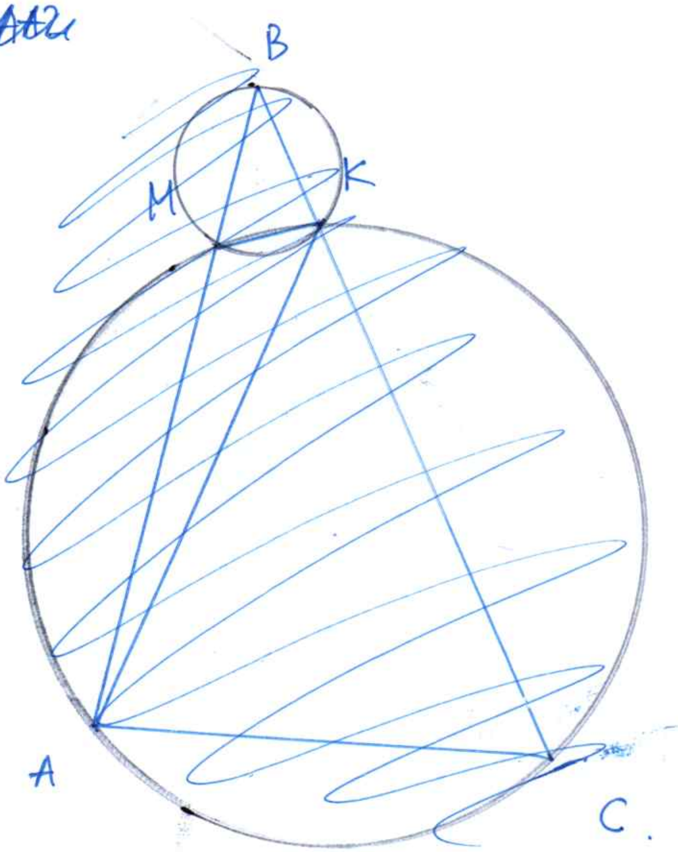
XX' нь A, B, C-с A-агуулна гэвэл аль нь г агуулахгүй. Энд XX' диагоналийн 2 тал нь 1,1-гүдгэр B ба C байрлана гэвэл хоёулаа нэг тал нь байрлана. Хэрэв 1,1 тал нь байрладаг бол XX' нь бодлогын нөхцөл хангана.

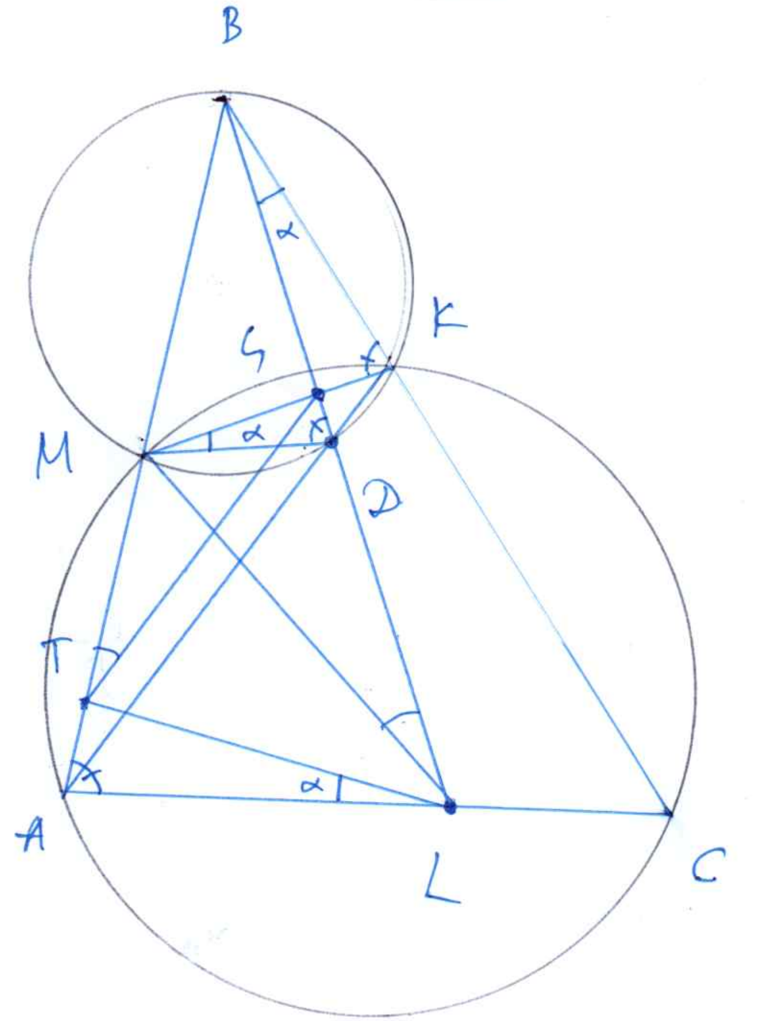
Учир нь n-өн-д B, C орой нэмэгдэж B, C-гүдгэр $\Rightarrow$ $\Rightarrow XX' \in$ О/Ө ба XX' гол диагональ хэвээр үлдэнэ. XX', YY', ZZ'-той ижлээр (*)-г хангадаг 3 диагональ нь MM', NN', KK' байг.

Энд 3 гүдгэр орой бий $\Rightarrow$ Дирихлейн зарчмаар (орой-тууштай нэгдүгээр 2 тал) нэг талд 2 орой оршино. B M B ба C-г холбоё. ТОР

... (*) г байрлаад

~~A2~~





$\angle ALT = \alpha$ гэе.

Өгсөн нөхцлөөс $\angle CBL = \alpha$.

MBKD – cyclic $\Rightarrow \angle KBD = \angle KMD = \alpha$

Мөн $\angle BKM = \angle BDM$.

AMKC – cyclic $\Rightarrow \angle BKM = \angle BAC$ $\Rightarrow \angle BDM = \angle MAL \Rightarrow$

$\Rightarrow$ MDLA – cyclic. $\Rightarrow \angle AMD + \angle DLA = 180^\circ$.

$\angle SMT + \angle SLT = \angle AMD + \cancel{\alpha} + \angle DLA \cancel{- \alpha} = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ SMTL – cyclic. $\Rightarrow \angle SLM = \angle STM$.

$\angle SLM = \angle DLM$ $\Rightarrow$

MDLA – cyclic $\Rightarrow \angle DLM = \angle DAM$.

$\Rightarrow \angle STM = \angle DAM \Rightarrow ST \parallel AD \Rightarrow ST \parallel AK$ болно

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

A3

Шифр 503 Оноо 2 Хуудас/Нийт 1 2

k-аар индукцээр

1°) $k = 1$ үед $n = 2$ гэж авбал $1+2^2+3^2=1+4+9=14 \vdots 7$ олдож байна.

2°) k үед олдоно гэж үзье. О/Х $1+2^n+3^n \vdots 7^k$ байг.

3°) $k+1$ үед $1+2^{n_1}+3^{n_1} \vdots 7^{k+1}$ байх n_1 олдохыг баталъя.

$2,3,7 \in P \Rightarrow$ Эйлерийн теоремоор $2^{\varphi(7^k)} \equiv 1\,(7^k)$.
$3^{\varphi(7^k)} \equiv 1\,(7^k)$.

$\varphi(7^k) \overset{7\in P}{=} (7-1)\,7^{k-1} = 6\cdot 7^{k-1}$

Энд $2^{6\cdot 7^{k-1}} \equiv 3^{6\cdot 7^{k-1}} \equiv 1\,(7^k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2^{6\cdot 7^{k-1}}\right)^a \equiv \left(3^{6\cdot 7^{k-1}}\right)^a \equiv 1\,(7^k) \Rightarrow 2^{6\cdot 7^{k-1}\cdot a} \equiv 3^{6\cdot 7^{k-1}\cdot a} \equiv$

$\equiv 1\,(7^k)$ энд $(a \in \mathbb{N})$.

$2^n \equiv 2^n \cdot 2^{6\cdot 7^{k-1}\cdot a}\,(7^k)$; $3^n \equiv 3^n \cdot 3^{6\cdot 7^{k-1}\cdot a}\,(7^k)$.

Иймд ИОА $\Rightarrow 1+2^n+3^n \vdots 7^k \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 3^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 1 \vdots 7^k$.

Одоо тэгвэл $2^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 3^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 1 \vdots 7^{k+1}$ байх $a \in \mathbb{N}$

олдоно гэж баталъя $\frac{2^n+3^n+1}{7^k} \equiv r\,(7)$ байг $(r \neq 0)$.

Хэрэв $r=0$ бол бодлого бодогдоно

Энд ~~$2^n+6\cdot 7^{k-1}$~~ ~~$2^n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a$~~ $\frac{2^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 3^{n+6\cdot 7^{k-1}\cdot a} + 1}{7^k} \equiv 0\,(7)$

$$2^{6\cdot 7^{k-1}} - 1 \equiv r\cdot 7^k \ (7^{k+1})$$

$$2^{\varphi(7^{k+1})} = 2^{6\cdot 7^k} \equiv 1\ (7^{k+1}) \Rightarrow (r\cdot 7^k + 1)^7 \equiv 1\ (7^{k+1}).$$

$$\frac{2^{n+6\cdot 7^{k-1}a} + 3^{n+6\cdot 7^{k-1}a} + 1}{7^k} \equiv 0\ (7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^n(2^{6\cdot 7^{k-1}a} - 1) + 3^n(3^{6\cdot 7^{k-1}a} - 1)}{7^k} \equiv -r\ (7)$$

$1^1 = 1\ (7)$; $1^2 = 1\ (7)$; $\vdots$

$2^1 = 2\ (7)$; $2^2 \equiv 4\ (7)$; $2^3 \equiv 1\ (7)$. $\vdots$

$3^1 \equiv 3\ (7)$; $3^2 \equiv 2\ (7)$; $3^3 \equiv 6\ (7)$; $3^4 \equiv 4\ (7)$; $3^5 \equiv 5\ (7)$; $3^6 \equiv 1\ (7)$.

$4^1 \equiv 4\ (7)$; $4^2 \equiv 4\ (7)$. $\vdots$

$5^1 \equiv 5\ (7)$; $5^2 \equiv 4\ (7)$; $5^3 \equiv 6\ (7)$; $5^4 \equiv 2\ (7)$; $5^5 \equiv 3\ (7)$; $5^6 \equiv 1\ (7)$

$6^1 \equiv 6\ (7)$; $6^2 \equiv 1\ (7)$

$$2^{6\cdot 7^k} + 3^{6\cdot 7^k} + 1 = 3\ (7^k).$$

$\Rightarrow$ Дээрх үлдэгдүүд нь 3 орвол бүх үлдэгдэл гарч байна. Ө/х. 0 үлдэгдэ

$\frac{1-a_1\dots a_n}{n} \le \frac{1}{1+a_1+\dots+a_n} \iff n \ge (1-a_1\dots a_n)(1+a_1+\dots+a_n)$.

Баталъя.

Эд бид $f(a_1,\dots,a_n)=(1-a_1\dots a_n)(1+a_1+\dots+a_n)$ утга ямар үед хамгийн их утгаа авахыг тодорхойльё.

Хэрэв $a_1+\dots+a_n \le n-1$ бол $(1-a_1\dots a_n)(1+a_1+\dots+a_n) \le$

$\le 1\cdot(1+(n-1)) = n$ болж т/б батлагдах тул

$a_1+\dots+a_n > n-1$ үед бодоход хангалттай.

$\left.\begin{array}{l} a_1+\dots+a_n > n-1 \\ i=\overline{1,n};\ 0\le a_i\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow j=\overline{1,n}$ хувьд $a_1+\dots+a_n = a_j+(a_1+\dots+a_n-a_j)$

гэж бичвэл $a_1+\dots+a_n-a_j \le n-1$ тул. $a_j>0$. байна.

Ө/х. $a_1,\dots,a_n>0$.

Хэрэв. $a_1,\dots,a_n$ тоонууд дунд $0<a_i,\ a_j<1$ байх i,j олдвол.

энэ нь $f(a_1,\dots,a_n)$ функцийн х/их утгыг өгч

чадахгүйг баталъя. Бид мөн $a_i+a_j>1$ гэдгийг баталъя.

($\forall i,j$ эсрэгээрээ $a_i+a_j\le 1$ бол.

$n-1\le a_1+\dots+a_n \le \underbrace{1+\dots+1}_{n-2}+a_i+a_j \le (n-2)+1=n-1 \Rightarrow$ зөрчил)

(~~$a_i+a_j<1$~~ ?)

Эд бид $a_i \to 1$.
$a_j \to a_i+a_j-1$ гэсэн тоогоор орлуулбал.

1-1 = $0<a_i+a_j-1<1+1-1=1$ болох тул манай a-н заалт

орж гадах тул ийм шинжүүдтэй функц байна. энэ функцийн

утга нь ($a_1+\dots+a_n = a_1+\dots a_{i-1}+a_i'+\dots+a_{j-1}+a_j'+\dots+a_n$ хэвээрээ)

$f(a_1,a_2,\dots,a_{i-1},a_i',\dots a_{j-1},a_j',\dots,a_n) = (1-a_1-\dots-a_n)\cdot\left(1-\frac{a_1\dots a_n}{a_i a_j}\cdot 1\cdot(a_i+a_j-1)\right)$

$\cdot\left(1-\frac{a_1\dots a_n}{a_i a_j}\cdot 1\cdot(a_i+a_j-1)\right) \ge (1-a_1-\dots-a_n)(1-a_1\dots a_n) \iff$

Иймээс $0<a_i,\ a_j<1$ байх i, j олдвол;

$f(a_1,\dots,a_n) < f(a_1',\dots,a_n')$ байх (ө/х түүнээс их байх)

$(a_1',\dots,a_n')$ тоонууд олдоно.

$1 \ge a_1,\dots,a_n > 0$ байна гэдгээс "Иймд" хамгийн их утгаа авахын тулд 1-тэй тэнцүү биш тоо хамгийн олондоо 1 ш байна гэсэн үг. Ө/х. үлдсэн ядаж $n-1$ ш тоо нь "1"-тэй тэнцэнэ.

Иймд $a_1,\dots,a_n$ нь тэгш эрхтэй тул

$\max\left(f(a_1,\dots,a_n)\right) = f(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1}, a_n)$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Одоо тэнцэл $f(1,\dots,1,a_n)\le n$ батлахад хангалттай.

$f(1,\dots,1,a_n) = (1-a_n)(n+a_n) \le n \iff \cancel{n} + a_n - na_n - a_n^2 \le \cancel{n}$

$\iff a_n \le a_n^2 + na_n \iff 0 \le a_n^2 + a_n(n-1)$ болж батлагдав.

$a_n=0$ үед тэнцэтгэл үүснэ.

Энэ тохиолдолд $a_1,\dots,a_n>0$ тул тэнцэтгэл үүсэхгүй.

Харин $a_1+\dots+a_n \le n-1$ үед.(1) $1-a_1\cdots a_n \le 1$

$(1-a_1\cdots a_n)(1+a_1+\dots+a_n) = n \Rightarrow 1+a_1+\dots+a_n \ge n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+\dots+a_n \ge n-1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\begin{cases} a_1+\dots+a_n = n-1 \\ a_1\cdots a_n = 0\end{cases} \Rightarrow$ Аль нэг нь "0" бусад нь "1".

Ө/х. $(a_1,\dots,a_n)$ нь $(\underbrace{1,\dots,1}_{n-1},0)$-н сэлгэмэл үед тэнцэтгэл үүснэ.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

B2

Шифр 399 Оноо 2 Хуудас/Нийт 1 2

$\max\{n(P)\} \le 20$. Учир нь. 20x20 хүснэгтийн 20 баганаар хувьд. Тус бүр $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ хар нүдтэй байг. Хэрэв. $i = \overline{1,20}$,

$a_i \to$ тэгш бол бид $\boxed{1 \times k}$ $1 \times k$ k

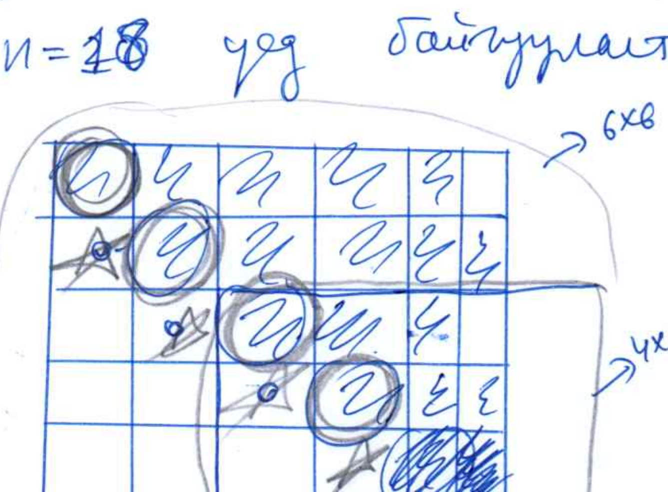
хэлбэрийн дүрсүүдээр (ижил байхалбагүй) аль ч дүрсэд нь 2 хар байхаар баганаа хуваан гадна

Аль ч хэсэгт нь 2 хар байхаар л уагааныг ж тоосон хуваахад л болно. Харин $a_i \to$ сондгой бол аль нэг хэсгийн тэдгүүлбал хаанийн дээд хар нүдний тусад нь $\boxed{1 \times m}$-д оруулна үлдсэн тэгш ширхэг харнуудийн тэгш үед байхтай ижлээр 2,2 хараар нь хуваана. Ингэхэд багана бүрээс 0 эсвэл 1 ц л 1-ээс олонгүй тооны хар нүдтэй т/онуулт үүснэ. О/х нийт 20 баганаас х/иходээ л 20 ш 1-ээс олонгүй тооны хар нүдтэй т/о байхаар хуваан гадна. Иймд

(-1) 0.

$\forall P$; $n(P) \le 20 \Rightarrow \max\{n(P)\} \le 20$.

$n = 18$ үед байгуулалт. (6×6 үед байгуулсан)



Энэ тохиолдлыг харахад. I мөрөнд эхний 19-ийг бүдээд II-д нь сүүлийн 18-г будаад

Ингээд 20×2, 2×20, 4×4-г нийлүүлсэн мэт үргэлж Г үсэг шиг дүрс үүсгэсэн дээр 18 ч чейн

Монголын Математикийн 55-р Олимпиад
III Даваа

Нэмэлт хуудас

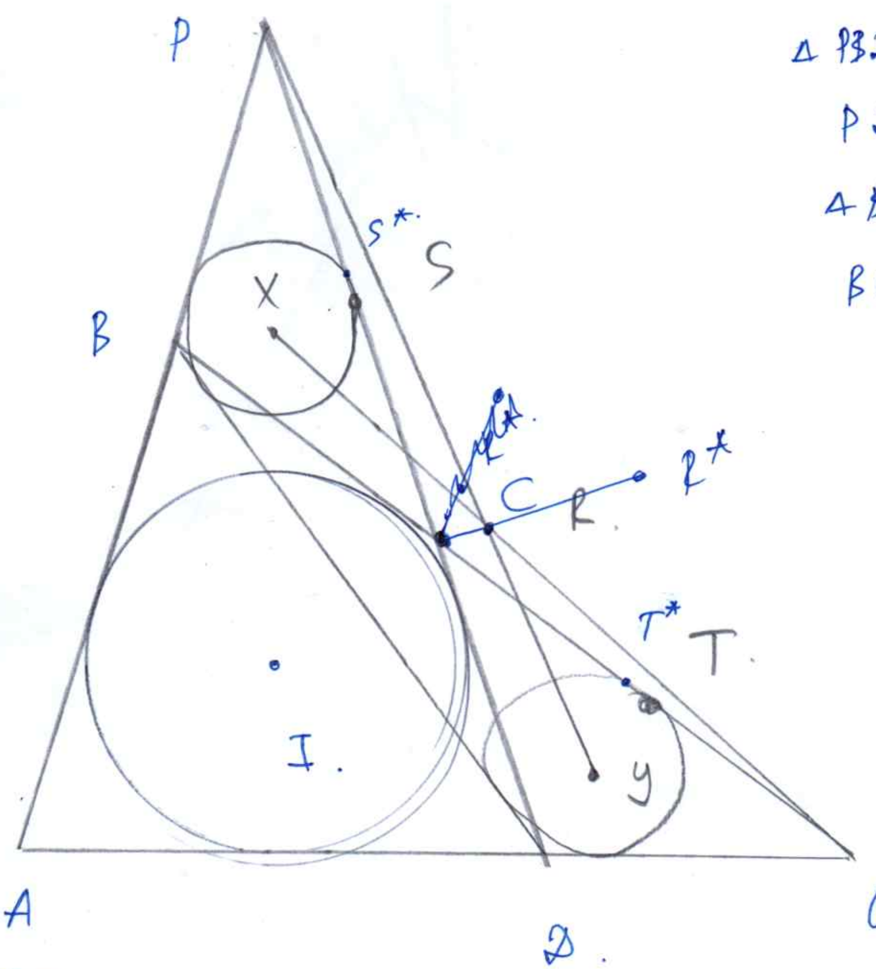
Шифр: 3 9 9 Бодлого: B 2 Хуудас/Нийт: 2 2

Одоо энэ байгуулалтанд заавал 2ош 1-ээс олонгүй будагдсан т/о орохыг баталъя.

Зүүн дээд нүдийг харахад үүнийг агуулсан яг 2ш хар нүдтэй т/о гэвэл зөвхөн (ε ε) 1×2 байна.

~~Хэвэл 1-ээс олонгүй будагдсан нүдтэй т/о-н тоо 5 ээс. Эсвэл 5нь 1-ээр ихэнх эвэл~~

Эдгээт дүрсэлсэн 4 нүднүүдээс 1ээс олон нь агуулсан т/о байхгүй ба. ☆-р тэмдэглэсэн нүднүүд г мөн ижил. ☆-р тэмдэглэгдсэн ордог ганц зөв нь (☆ ε ε) 1×3 байна. Энэ ядаж $n-2$ бүлэг 18 ширхэг т/о хэрэгтэй ба энэ үед $P(P) = 18$.



$\triangle PBD$-д багтсан тойрог. PD-г S цэгт ;
$\triangle BQD$-д багтсан тойрог. BQ-г T цэгт шүргэдэг байг. Тэгвэл $SC=x$; $CT=y$ гээд C-дээр төвтэй $\sqrt{xy}$ радиустай инверс хийе.

$r^2 = SC\cdot CT \Rightarrow$

$$\begin{cases} CS = CT^* \\ CT = CS^* \end{cases} \quad (1)$$

~~CX=~~

$\triangle ABC$ багтсан тойрог $\omega(\triangle ABC)$ гэе

Мөн. $RI \cap BD = H$ гэе.

PD, QB шулууны өөр өөртөө буух ба $(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(PBD)^*$ нь S^*-д шүргэх (PD-г) тойрог болно. Ү/а $\omega(BDQ)^*$ нь T^*-д шүргэх (BQ-г) тойрог болно.

X-ийн дүр XC-д Y-ийн дүр YC-д орших ба

$R' = X^*Q^* \cap P^*Y^*$. $\triangle CXQ \sim \triangle CQ^*X^*$, $\triangle CYP \sim \triangle CP^*Y^*$ $\Big\} \Rightarrow$ $\measuredangle RCR^*$-н