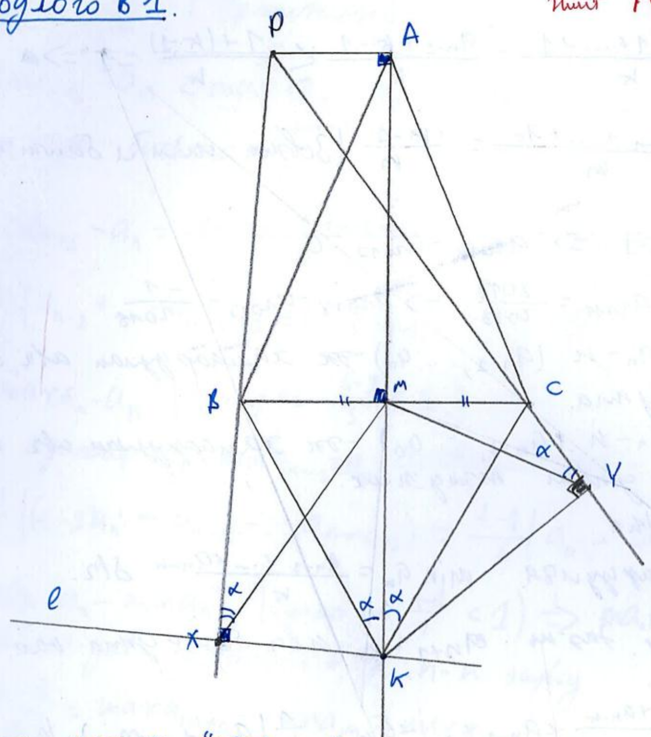
Оломлог сургууль А. Пүрэвдаваа.

I – 7
II – 1
III – 2
Нийт 10

Бодлого B1.



$\triangle ABC$-ийн адил хажуут учир AM нь өндөр бисс, медиан болно.
Y-г дайрсан PX-д $\perp$ шулууныг l гэе. $l \cap (AM) = K$ б/г. $\angle BXK = 90^\circ$
$PA \parallel BC \Rightarrow \angle MAP = 90^\circ$
Эндээс $\angle PAK + \angle PXK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow PAKX$ нь тойрогт багтана.
Мөн $\angle BXK + \angle BMK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow BMKX$ нь тойрогт багтана $\Rightarrow \angle BXM = \angle BKM = \alpha$
$\triangle BKC$-ийн хувьд KM нь өндөр ба медиан $\Rightarrow BK = KC$ ба KM бисс болно $\Rightarrow \angle BKM = \angle MKC = \alpha$ болно.

Одоо нөхцөл ёсоор $\angle PXM = \angle PYM = \alpha \Rightarrow \angle PYM = \angle CYM = \angle CKM = \alpha \Rightarrow$ $MCYK$ нь тойрогт багтана $\Rightarrow CYK = 90^\circ \Rightarrow \angle PAK = \angle PYK = 90^\circ \Rightarrow PAYK$ нь тойрогт багтана. PAK $\triangle$-г багтаасан тойрог цор ганц $\Rightarrow PAYK$, $PAKX$ тойрогт багтана $\Rightarrow PAYKX$ нь тойрогт багтана $\Rightarrow PAYX$ нь тойрогт багтана $\Rightarrow \blacktriangle$

Бодлого B3

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2, a_3 \dots \quad a_n = \frac{a_{n-1} + \dots + a_{n-k}}{k} \quad 1 \le k \le n.$

Энэ дарааллын гишүүд 1-ээс хэтрэхгүйг индукцээр.
$a_0 = 0 \le 1,\ a_1 = 1 \le 1 \Rightarrow$ суурь үнэн.
n-ээс бага бүх үед үнэн гэж үзээд n-үед баталъя.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \dots + a_{n-k}}{k} \le \frac{1 + 1 + \dots + 1}{k} = \frac{k}{k} = 1. \qquad a_{n-1} \le 1,\ \vdots\ a_{n-k} \le 1. \Rightarrow \triangle$$

$a_0 = 0,\quad a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 1$ ба $a_m < 1$ б/г. Тэгвэл $m \le n$ б/х n бүрийн хувьд $a_n < 1$ б/на. (Үүнийг мөн индукцээр)
$a_m < 1$-ийн үнэн $\Rightarrow$ суурь үнэн

~~n-ээс бага бүх үед үнэн гэж үзэх~~

(n-1) үед үнэн гэж үзээд n үед баталъя.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k} \le \frac{a_{n-1}+1+\dots+1}{k} = \frac{a_{n-1}+k-1}{k} < \frac{1+(k-1)}{k} = 1 \Rightarrow \blacktriangle$$

a_m-г сонирхоё. $a_m = \frac{a_{m-1}+\dots+a_0}{m} = \frac{m-1}{m}$ (Зөвхөн min n байх бол),

2018<m үед $a_{2018}=a_{2017}=1 \Rightarrow a_{2018}-a_{2017}=0$.

2018=m үед $a_{2017}=1$. $a_{2018}=\frac{2017}{2018} \Rightarrow a_{2018}-a_{2017}=\frac{-1}{2018}$.

2018>m үед $\max a_n$ - ээр a_n-н $(a_{n-1},\dots a_0)$-ээс хамааруулан авч болох хамгийн их утга.

$\min a_n$ - ээр a_n-н $(a_{n-1},\dots a_0)$-ээс хамааруулан авч болох хамгийн бага утгыг тэмдэглэх.

$\max a_n \ge a_n \ge \min a_n$ б/на.

$\min a_n \ge \min a_{n-1}$-г харуулъя. $\min a_n = \frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k}$ б/г.

$\frac{a_n+a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k+1}$-г сонирхоё. Энэ нь a_{n+1}-н авч болох утга юм.

$$\frac{a_n+a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k+1} \overset{?}{\neq} \frac{\frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k}+a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k+1} = \frac{\frac{1}{k}(a_{n-1}+\dots+a_{n-k})+(a_{n-1}+\dots+a_{n-k})}{k+1}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{k})(a_{n-1}+\dots+a_{n-k})}{k+1} = \frac{\frac{k+1}{k}\cdot(a_{n-1}+\dots+a_{n-k})}{k+1} = \frac{a_{n-1}+\dots+a_{n-k}}{k} = \min a_n \Rightarrow$$

$\min a_n \ge \min a_{n+1}$ - нь батлагдав. $\Rightarrow |\max a_{n+1} - \min a_n|$-н ХИУ-г олно $\Rightarrow$

$\max a_{n+1} - \min a_n \le \max a_{n+1} - \min a_{n+1}$ -г сонирхоё.

$$\max a_{m+1} = \frac{a_m+\dots+a_{m-p+1}}{p} = \frac{\frac{m-1}{m}+(p-1)}{p} = \frac{1-\frac{1}{m}+p-1}{p} = \frac{p-\frac{1}{m}}{p} = 1-\frac{1}{mp} \le 1-\frac{1}{m^2}$$

$$\min a_{m+1} = \frac{a_m+\dots+a_{m-p+1}}{p} = 1-\frac{1}{mp} \vee \frac{a_m+a_{m-1}+\dots+a_0}{m+1} = \frac{\frac{m-1}{m}+(m-1)}{m+1} = 1-\frac{2}{m^2+m} \Rightarrow$$

p=1 үед $1-\frac{1}{m} < 1-\frac{2}{m^2+m}$ тул $\min a_{m+1} = \frac{m-1}{m} = a_m$, $\max a_{m+1} = 1-\frac{1}{m^2}$

$$\max a_{m+1} - a_m = \frac{m^2-1}{m^2} - \frac{m-1}{m} = \frac{m^2-1-m^2+m}{m^2} = \frac{m-1}{m^2} = \max a_{m+1} - \min a_{m+1}$$

$\max a_{n+2} - \min a_{n+1} < \max a_n - \min a_n$ -ийг харуулъя. $1 \le s,t \le n+1$.

$\max a_{n+1} = \frac{a_n+\dots+a_{n-s+1}}{s}$; $\min a_{n+1} = \frac{a_n+\dots+a_{n-t+1}}{t}$ б/г.

Олимпиад сургууль А. Пүрэвдаяа

Бодлого Б3 (Үргэлжлэл)

$\max a_{n+1} - a_n < \max a_n - a_n$, ~~$\max a_{n+1}$~~ $a_n - \min a_{n+1} < a_n - \min a_n$-гэж тус тус батална.

$\max a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + \ldots + a_{n-s+1}}{s} - a_n = \frac{1}{s}(a_n + \ldots + a_{n-s+1} - s a_n) =$

$= \frac{1}{s}(a_{n-1} + \ldots + a_{n-s+1} - (s-1)a_n) = \frac{s-1}{s}\left(\frac{a_{n-1} + \ldots + a_{n-s+1}}{s-1} - a_n\right) \le \frac{s-1}{s}(\max a_n - a_n) <$ (энд $\frac{a_{n-1}+\ldots+a_{n-s+1}}{s-1}$ нь a_n-н авч болох утга)

$< \max a_n - a_n$ (учир нь $\frac{s-1}{s} < 1$.)

Мөн адилаар $a_n - \min a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-t+1}}{t} = \frac{1}{t}(t a_n - a_n - a_{n-1} - \ldots - a_{n-t+1}) =$

$= \frac{1}{t}((t-1)a_n - a_{n-1} - \ldots - a_{n-t+1}) = \frac{t-1}{t}\left(a_n - \frac{a_{n-1} + \ldots + a_{n-t+1}}{t-1}\right) \le \frac{t-1}{t}(a_n - \min a_n) <$ энэ нь a_n-н авч болох утга.

$<$ $a_n - \min a_n$ (учир нь $\frac{t-1}{1} < 1$) $\Rightarrow \max a_{m+1} - \min a_{m+1} < \max a_n - \min a_n$ нь

батлагдав. $\Rightarrow (1+m) < n$ б/х n-н хувьд

$\frac{m-1}{m^2} = \max a_{m+1} - \min a_m = \max a_{m+1} - \min a_{m+1} > \max a_n - \min a_n \geq$

$\geq \max a_n - \min a_{n-1} \Rightarrow 2018 > m$ үед $(a_{2018} - a_{2017})$ нь ХИУ-аа авахгүй $m = 2017$ б/на. $\Rightarrow a_{2017} = \frac{2016}{2017}$ $a_{2018} = \frac{2017^2 - 1}{2017^2} \Rightarrow$

ХИУ$(a_{2018} - a_{2017}) = \frac{2016}{2017^2}$ Хариу: $\frac{2016}{2017^2}$

Бодлого Б2 Баганыг $1, 2, \ldots 2k$ тоогоор тэмдэглэе.

$k = 1$ үед $(4 + 1 - 1)/2 = 2$ ба $\binom{1}{2} - 2$.

$k = 2$ үед. $(4 \cdot 4 + 2 - 1) \cdot 2/2 = 17$ ба $\begin{pmatrix} 2\,3\,3\,4\,4\,4 \\ 1\,1\,2\,1\,2\,3 \end{pmatrix} - \left.\begin{matrix} 1 - 4 \\ 2 - 5 \\ 3 - 5 \\ 4 - 3 \end{matrix}\right\} 17.$

$k = 3$ үед. $(4 \cdot 9 + 3 - 1) \cdot 3/2 = 57$ ба $\begin{pmatrix} 2\,3\,3\,4\,4\,4 & 1\,1 & 2\,2 & 3\,3\,4\,4\,5 \\ 1\,1\,2\,1\,2\,3 & 5\,6 & 5\,6 & 5\,6\,5\,6\,6 \end{pmatrix} - \left.\begin{matrix} 1 - 8 \\ 2 - 10 \\ 3 - 11 \\ 4 - 11 \\ 5 - 9 \\ 6 - 8 \end{matrix}\right\} 57.$

$\{a_1, \dots a_{2n}\}$ - г дараах байдлаар тэмдэглэх. a_1 - нь 1-р ирсэн тамирчны ирсэн өдөр. буюу a_i - нь i-рт ирсэн тамирчны ирсэн өдөр.

$a_i \le C_{i-1}^2+1$ (Учир нь a_i - г ирэхэд өмнө ирсэн $(i-1)$ ш тамирчин ХИ-дээ C_{i-1}^2 өдөр тоглох ба i-р тамирчин шаргаан ирнэ.)

Нөгөө талаас мөн адилаар $\{b_1, \dots b_{2n}\}$ нь

b_1 - нь 1-рт буцсан тамирчны буцсан өдөр. гэж мэтээр

b_i нь i-рт буцсан тамирчны буцсан өдөр

гэж тэмдэглэвэл

$b_i \geq C_{2n}^2 - C_{2n-i}^2$ (Учир нь i-дэх тамирчин буцсаны дараа $(2n-i)$ ш тамирчин үлдэж ХИ-дээ C_{2n-i}^2 ш тоглолт хийнэ)

Олонлог сургууль А. Пүрэвзаяа

I - 7
II - 7
III - 2
Нийт 16

Бодлого А1.

$f: \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ $\quad f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$

Энэ функцийн утгын муж буюу $f(x)=m$ $\exists x$ бүх m-үүдийн олонлогийг S гэж тэмдэглэе.

$x = \frac{1}{f(y)}$ гэж орлуулъя. $\frac{1}{f(y)} \in \mathbb{Q}_{>0}$

$f(1) = f\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 \cdot f(y)$ болно.

$y=1$ үед $f(1) = f\left(\frac{1}{f(1)}\right)^2 f(1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(1)}\right)^2 = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(1)}\right) = 1 \Rightarrow 1 \in S$

$f(1) = a$. гэе.

$\forall b \in S$-ийн хувьд $f(b_0) = b$

$f(1) = f\left(\frac{1}{f(b_0)}\right)^2 \cdot f(b_0) \Rightarrow a = f\left(\frac{1}{f(b_0)}\right)^2 \cdot b \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(b_0)}\right)^2 = \frac{a}{b} \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{f(b_0)}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} \in S \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}_{>0}$ ёстой болно.

$1 \in S \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \sqrt[4]{a} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a^3} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow \ldots$

$c_1 = 1.$

$\sqrt[2^n]{a^{c_n}} \in \mathbb{Q}_{>0}$ гэвэл $c_n = 2^{n-1} - c_{n-1}$ б/на. Учир нь $\sqrt[2^{n-1}]{a^{c_{n-1}}} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{a}{\sqrt[2^{n-1}]{a^{c_{n-1}}}}} = \sqrt[2^n]{\frac{a^{2^{n-1}}}{a^{c_{n-1}}}} = \sqrt[2^n]{a^{2^{n-1} - c_{n-1}}} = \sqrt[2^n]{a^{c_n}}$ болно. $\Rightarrow c_n < 2^{n-1}$

$c_n = 2^{n-1} - c_{n-1} \Rightarrow c_n \equiv c_{n-1} (2) \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow c_n \equiv 1 (2)$ болно.

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ бол $\alpha_1 \cdot c_n \equiv \alpha_1 (2) \Rightarrow v_2(\alpha_1) = k$ б/г.
$\alpha_i \in \mathbb{Z}/\{0\}$

(v_2-нь 2-ын зэрэг) $n > k$ үед $\alpha_1 c_n \not| \, 2^n$ болж $\sqrt[2^n]{a^{c_n}} \notin \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow$

a нь анхны ~~тоонд хуваагдах~~ тоон ануулагчийн буюу зэрэг тул 1 б/н

$(p_1, \ldots p_s \in \mathbb{P})$

$b\in S'$ бол $\sqrt{\frac{1}{b}}\in S'$ болно. Мөн $b\neq 1$ $b\in S'$ бх $\exists b$ гэж үзье

$b\in S' \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{b}}\in S' \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}}}}=\sqrt[4]{b}\in S' \Rightarrow \dots$ гэх мэтчилэн $\sqrt[2^n]{b^{(-1)^n}}\in S'$

гэж харуулъя.

$n=1$ үед $\sqrt[2^1]{b^{(-1)^1}}=\sqrt{\frac{1}{b}}\in S' \Rightarrow$ суурь үнэн $\Rightarrow (n-1)\to n$ нь

$\sqrt[2^{n-1}]{b^{(-1)^{n-1}}}\in S' \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\sqrt[2^{n-1}]{b^{(-1)^{n-1}}}}}=\sqrt[2^n]{\frac{1}{b^{(-1)^{n-1}}}}=\sqrt[2^n]{b^{(-1)^n}}\in S'$ болно.

$\Rightarrow b=q_1^{\beta_1}\dots q_t^{\beta_t}$ б/г. $\beta_i\in\mathbb{Z}/\{0\}$ $q_1,\dots q_t\in\mathbb{P}$

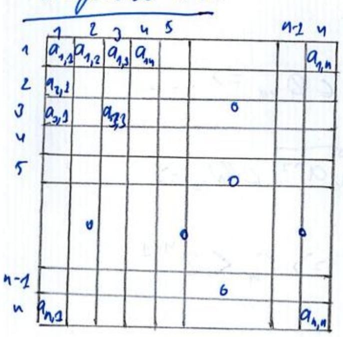
$\beta_1<2^n$ б/х n-н хувьд $\beta \not\vdots 2^n \Rightarrow \sqrt[2^n]{b^{(-1)^n}}\notin\mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow b=1$ б/х ёстой $\Rightarrow$

$f(x)=1$ болох буюу $S'=\{1\}$ болно. Хариу: $f(x)=1$.

Шалгавал $f(x^2 f(y)^2)=1$.

$f(x)^2 f(y)=1^2\cdot 1=1$ $\Big| \Rightarrow$ ▲

Бодлого A2.



i-р мөр j-р баганад б/гаа тоо $a_{i,j}$ гэе.

Мөр бүр дэх тоонууд n-д хуваахад 1 үлдэгдэлтэй

$\Rightarrow a_{i,j}=b_{i,j}\cdot n+1$ гэж бичье.

Аль ч багана, аль ч мөрийн б/х тоонуудын

нийлбэр n^2-д хуваагдана $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\equiv 0\ (n)\quad i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\equiv 0\ (n)\quad j=\overline{1,n}$$ болно.

$$R_i=\prod_{j=1}^{n}(b_{i,j}\,n+1)\qquad C_j=\prod_{i=1}^{n}(b_{i,j}\cdot n+1).$$

Олонлог сургууль А. Пурэвзаяа

Бодлого А2 (Үргэлжлэл 1) $B=\sum_{1\le i,j\le n} b_{i,j}$ (бүх $b_{i,j}$-н нийлбэр)

$$R_i=\prod_{j=1}^{n}(b_{i,j}n+1)\equiv n^3\cdot r_{3,i}+n^2\cdot r_{2,i}+n\cdot\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}+1\ (n^4)$$

$r_{3,i}$ нь i-р мөрийн гурвалсан үржвэр.

$r_{2,i}$ нь i-р мөрийн хоёрлосон үржвэр.

$$C_j=\prod_{i=1}^{n}(b_{i,j}+1)\equiv n^3 c_{j,3}+n^2\cdot c_{j,2}+n\sum_{i=1}^{n}b_{i,j}+1\ (n^4)$$

$c_{j,3}$ нь j-р баганын гурвалсан үржвэр

$c_{j,2}$ нь j-р баганын хоёрлосон үржвэр.

$R_1+R_2+\dots+R_n\equiv C_1+\dots C_n\ (n^4)$ гэж батална.

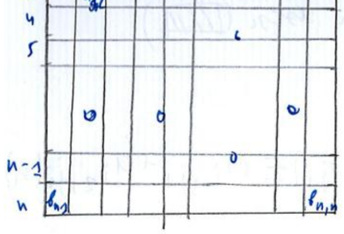
$$n^3\sum_{i=1}^{n}r_{3,i}+n^2\sum_{i=1}^{n}r_{2,i}+\cancel{n\cdot B}+\cancel{n}\equiv n^3\sum_{j=1}^{n}c_{j,3}+n^2\sum_{j=1}^{n}c_{j,2}+\cancel{n\cdot B}+\cancel{n}\ (n^4)\Rightarrow$$

$$n^3\sum_{i=1}^{n}r_{3,i}+n^2\sum_{i=1}^{n}r_{2,i}\equiv n^3\sum_{j=1}^{n}c_{j,3}+n^2\sum_{j=1}^{n}c_{j,2}\ (n^4)$$ гэж батална. $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n}r_{3,i}\equiv\sum_{j=1}^{n}c_{j,3}\ (n)$, $\sum_{i=1}^{n}r_{2,i}\equiv\sum_{j=1}^{n}c_{j,2}\ (n^2)$ гэж батлахад хангалттай.

1) $\sum_{i=1}^{n}r_{2,i}\equiv\sum_{j=1}^{n}c_{j,2}\ (n^2)$ гэж харуулъя.

$n\times n$ хүснэгт бичье. i-р мөр, j-р баганад $b_{i,j}$ бичигдсэн байхаар бичье. $S_{r,i}\equiv S_{c,j}\equiv 0\ (n)$ байна.



i-р мөрийн тоонуудын нийлбэр-г $S_{r,i}$, j-р баганын тоонуудын нийлбэр-г $S_{c,j}$ гэе.

$S_{r,i}$-үүдийн ($i=\overline{1,n}$) бүх хоёрлосон C_n^2 ш үржвэр-н нийлбэрийг авч үзвэл $\sum_{i=1}^{n}r_{2,i}+A$ гарна.

A нь $b_{i_1,j_1}\cdot b_{i_2,j_2}$-үүдийн нийлбэр
$i_1\ne i_2,\ j_1\ne j_2$

Мөн нөгөө талаас $\sum_{i=1}^{n} r_{2,i} + A \equiv n^2 \equiv 0\,(n^2)$ болно.

Одоо $S_{c,j}$ - үүдийн ($j=\overline{1,n}$) хоёрлосон үржвэрийн нийлбэр нь мөн $\sum_{j=1}^{n} c_{j,2} + A$ бараг ба n^2-д 0 үлдэгдэл өгнө. =>

$$(-A) \equiv \sum_{i=1}^{n} r_{2,i} \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{j,2} \equiv (n^2) \text{ болж } \blacktriangle$$

б.) $\sum_{i=1}^{n} r_{3,i} \equiv \sum_{j=1}^{n} c_{j,3}\,(n)$ гэж харуулъя. а)-д гаргасан n×n хүснэгт болон $S_{r,i}$, $S_{c,j}$-үүдийг адилаар тэмдэглэх.

$S_{r,i}$-үүдийн гуравласан бүх үржвэрийн нийлбэр нь $\sum_{j=1}^{n} c_{j,3} + P + T$ болно. P нь $a_{i_1j_1} a_{i_2j_1} a_{i_3j_2}$ - үүдийн үржвэр.
$i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$, $j_1 \neq j_2$

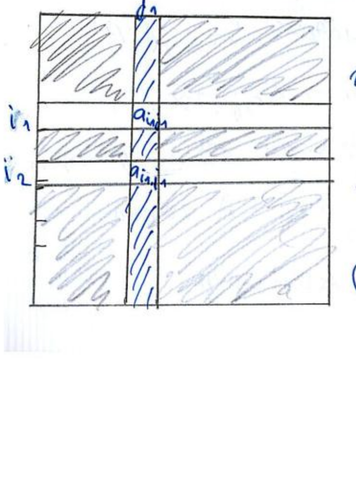
$$S_{r,i} \equiv 0\,(n) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_{j,3} + P + T \equiv 0\,(n)$$

T нь $a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} a_{i_3,j_3}$ - үүдийн үржвэр. $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$, $j_1 \neq j_2$, $j_1 \neq j_3$, $j_2 \neq j_3$

$S_{c,j}$ - үүдийн мөн бүх гуравласан үржвэрүүдийн нийлбэр нь $\sum_{i=1}^{n} r_{3,i} + Q + T$ болно. Q нь $a_{i_1j_1} a_{i_1j_2} a_{i_2,j_3}$ - үүдийн үржвэр
$i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, $j_2 \neq j_3$, $j_1 \neq j_3$

$S_{c,j} \equiv 0\,(n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_{3,i} + Q + T \equiv 0\,(n) \Rightarrow P \equiv Q\,(n)$ гэж баталахад хангалттай.

P-г авч үзье. $a_{i_1j_1} a_{i_2j_1}$ бүх боломжит хувьд $a_{i_3j_2}$-г тоолъё.



a_{i_3,j_2}-г хараар будсан бүх хэсэг дээгүүр гүйлгэе. Хараар будсан хэсгийн нийлбэр-г авъя. (n-модулиар) S_x-гэе. S_y - зураасаар будагдсан хэсэг (▨)

$S_x + S_y \equiv n(n-2) \equiv 0\,(n)$

$S_y = n - a_{i_1j_1} - a_{i_2,j_1}$

$(S_x + S_y) - S_y \equiv 0 - (n - a_{i_1,j_1} - a_{i_2,j_1}) \equiv a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_1}\,(n)$

Оролцогч сурагч А. Пүрэвзаяа.

<u>Бодлого А2</u> (Үргэлжлэл 2)

$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_1}$ б/х үржвэр оролцсон нэмэгдэхүүнүүдийн нийлбэр нь n модулиар $a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_1} \cdot (a_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_1}) = a_{i_1 j_1}^2 a_{i_2 j_1} + a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_1}^2$ б/на.

~~$a_{i_1 j_1}$-ийн хувьд $\sum_{k=1, k \neq i_1}^{n} a_{i_1 j_1} \cdot a_{k j_1}$~~

j_1-р баганын бүх тоонуудын хоёрлосон үржвэр-н хувьд дээрхийг бичвэл $a_{1 j_1}^2 (a_{2, j_1} + a_{3, j_1} + \ldots + a_{n, j_1}) + a_{2, j_1}^2 (a_{1, j_1} + a_{3, j_1} + \ldots + a_{n, j_1}) + \ldots + a_{n, j_1}^2 (a_{1, j_1} + a_{2, j_1} + \ldots + a_{n-1, j_1}) \equiv a_{1, j_1}^2 (n - a_{1, j_1}) + a_{2, j_1}^2 (n - a_{2, j_1}) + \ldots + a_{n, j_1}^2 (n - a_{n, j_1}) \equiv -(a_{1, j_1}^3 + a_{2, j_1}^3 + \ldots + a_{n, j_1}^3) (n)$

n ш баганын хувьд бүгдэд нь бичвэл

$P \equiv -(\sum_{1 \le i, j \le n} a_{i, j}^3) (n)$ болно. Нөгөө талаас мөн адилаар Q-г

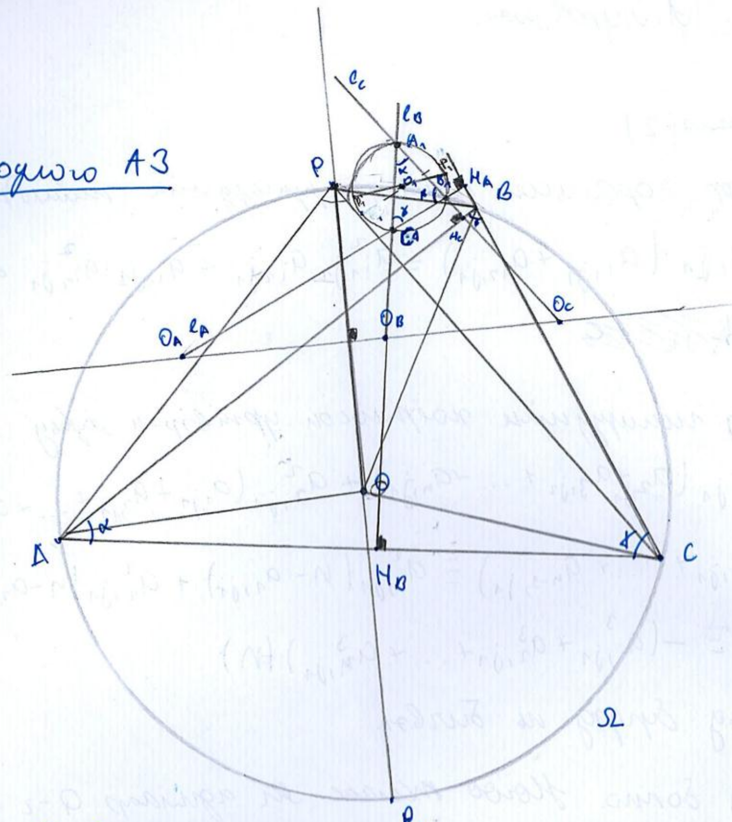
$a_{i_1, j_1} \cdot a_{i_1 j_2}$ б/х үржвэр оролцсон нэмэгдэхүүний нийлбэр:

a_{i_2, j_3}-н авч болох утгуудын нийлбэр нь мөн $(a_{i_1, j_1} + a_{i_1, j_2})$ тай n-модулиар тэнцүү. => $a_{i_1 j_1}^2 a_{i_1 j_2} + a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2}^2$ б/на. Үүнийг бүх 1 мөрөнд харгалзах б/х хосуудын хувьд бичвэл

$Q \equiv -(\sum_{1 \le i, j \le n} a_{i, j}^3) (n)$ болно => $P \equiv Q (n)$ болж ▲

I – 7
II – 7
III – 2
Σ

Бодлого A3



O_A, O_B, O_C нь 1 шулуун дээр оршино. Учир нь $\triangle AOP$, $\triangle BOP$, $\triangle COP$ нь OP-гэсэн ерөнхий талтай тул OP-н дундаж ⊥ дээр O_A, O_B, O_C нь оршино. $(l_C \cap l_B) = A_1$, $(l_C \cap l_A) = B_1$, $(l_B \cap l_A) = C_1$ гэх.

$(AC) \cap l_B = H_B$, $(AB) \cap l_C = H_C$, $(BC) \cap l_A = H_A$

$\angle A_1 H_B A = \angle A H_C A_1 = 90^\circ \Rightarrow A H_B H_C A_1$ тойрогт багтана $\Rightarrow$

$\angle BAC = \angle H_B A_1 H_C = \alpha$.

$\angle B_1 H_A B + \angle B H_C B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow B H_A H_C B_1$ тойрогт багтана $\Rightarrow \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1 = \beta$

$\angle C_1 H_A C + \angle C_1 H_B C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow C_1 H_A C H_B$ тойрогт багтана $\Rightarrow \angle BCA = \angle A_1 C_1 B_1 = \gamma$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$ болно. (k - төсөөгийн коэф бол) $AC \perp l_B$ буюу $AC \perp A_1C_1$ мөн адилаар $AB \perp A_1B_1$, $BC \perp B_1C_1 \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ нь $\triangle ABC$-г 90° эргүүлэн k дахин жижигрүүлсэн байна. $\triangle A_1B_1C_1$-н багтаасан тойргийг Ω_1 гэе. Ω_1-г OP шүргэнэ $\Rightarrow \Omega$-г OP-д шүргүүн шүргэх болно. $\Rightarrow (PO) \cap \Omega = P'$ гэе. P' дээр татсан шүргэгч OP-д ⊥ б/на $\Rightarrow$ Ω_1 нь P_1-г P-рүү ижил харгалзах цэгээр авъя. Ω_1-н төв нь O_1 б/г. $(O_1P_1) \cap \Omega_1 = P_1'$ гэвэл P_1'-г OP дээр оршино гэж харуулъя.