1р оргүүл
М. Өнөболд

A1. $\forall z\in\mathbb{Q}_{>0}$ аваад $x=\frac{z}{f(z^2)}$ ба $y=z^2$ гэж орлуулбал
$$f\left(\frac{z^2}{f(z^2)^2}\cdot f(z^2)^2\right)=f(z^2)=f\left(\frac{z}{f(z^2)}\right)^2\cdot f(z^2)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{z}{f(z^2)}\right)=1$$ гэж гарна.

Өгсөн нөхцөлд x дурын эерэг рационал тоо, $y=\frac{z}{f(z^2)}$ гэж орлуулбал $f(y)=1$ тул $f(x^2)=f(x)^2$ болно. Чухам өгсөн нөхцөлд ашиглавал $f(x)^2f(y)=f((xf(y))^2)=f(xf(y))^2 \Rightarrow f(y)=\frac{f(xf(y))^2}{f(x)^2}$ (*) болно. (*)-с, $\forall y\in\mathbb{Q}_{>0}$ хувьд $f(y)$ нь рационал тооны квадрат гэж гарна. $f_1, f_2, \dots$ функцуудын дараалал, $f_k(x)=\sqrt{f_{k-1}(x)}$ ба $f_1(x)=\sqrt{f(x)}$ гэж байгуулъя. Тэгвэл $f_k:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$ болохыг ~~тэгэх~~ батлъя.

"Claim. $\forall x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$: $f_k(y)=f_k(xf_k(y$

Claim. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}_{>0}$: $f_k(y)=\frac{f_k(xf(y))^2}{f_k(x)^2}$

Баталгаа. k-р индукция.

1° $k=1$ үед $f_1(y)=\sqrt{f(y)}\overset{(*)}{=}\frac{f(xf(y))}{f(x)}=\frac{f_1(xf(y))^2}{f_1(x)^2}$ болно.

2° $k-1$ үед биелдэг гэе.

3° k үед батлъя. $f_k(y)=\sqrt{f_{k-1}(y)}\overset{2°}{=}\frac{f_{k-1}(xf(y))}{f_{k-1}(x)}=\frac{f_k(xf(y))^2}{f_k(x)^2}$

болж батлагдана.

Claim ёсоор, $f_k:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$ болно. Чухам индукцээр батлъя. $k=1$ үед $\forall y\in\mathbb{Q}_{>0}$ хувьд, $x\in\mathbb{Q}_{>0}$ авахад $f_1(y)=\sqrt{f(y)}\overset{(*)}{=}\frac{f(xf(y))}{f(x)}\in\mathbb{Q}_{>0}$ болно, иймд $f_1:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$. Одоо $f_{k-1}:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$ байг. Тэгвэл Claim ёсоор, $f_k(y)=\frac{f_k(xf(y))^2}{f_k(x)^2}=\frac{f_{k-1}(xf(y))}{f_{k-1}(x)}$ ба өмнөх алхам ёсоор $f_{k-1}(xf(y))$ ба $f_{k-1}(x)\in\mathbb{Q}_{>0}$, иймд $f_k(y)\in\mathbb{Q}_{>0}$. Иймээс $f_k:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$ болох нь батлагдлаа.

$f_{k-1}(x)=f_k(x)^2$ тул $\forall x\in\mathbb{Q}_{>0}$: $f(x)=f_1(x)^2=f_2(x)^4=\dots=f_k(x)^{2^k}$ болно (энд дурын $k\in\mathbb{Q}_{>0}$ авч үзсэн). Хэрэв $f(x)\neq 1$ бол, $f_k(x)\neq 1$ ба $f(x)=\frac{u}{v}$, $(u,v)=1$ байх $u,v\in\mathbb{N}$ гэж үзвэл $f(x)=\frac{u}{v}=f_k(x)^{2^k}$ тул, u ба v нь натурал тооны 2^k зэрэг байх ёстой. Гэвч энэ нь хангалттай том k-н хувьд биелэхийн тулд $u=v=1$ байхаас өөр аргагүй, энэ нь $f(x)\neq 1$ гэдэгтэй зөрчилдөнө. Иймд, $f(x)=1$ болно, ө.х $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$ нь $f=const=1$ функц байна.

A2. i-р мөр, j-р баганы огтлолцолдох тоог $a_{ij} = nb_{ij}+1$ гээд, i-р мөрийн ба j-р баганы тоонуудын нийлбэрийг харгалзан x_i ба y_j гэе. $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = n\sum_{j=1}^{n} b_{ij} + n \equiv n \pmod{n^2} \Rightarrow n \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$, адилхаар $n \mid \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$. Ө.х

$$\begin{cases} n \mid \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \\ n \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \end{cases} \quad (*)$$

байна.

$R_1+\dots+R_n = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1+nb_{ij})$ ба $\prod_{j=1}^{n}(1+nb_{ij})$ үржвэрийн хаалт задлаад, mod n^4-р жишвэл

$$R_1+\dots+R_n \equiv \sum_{i=1}^{n}\Big(1+n\sum_{j=1}^{n} b_{ij} + n^2\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} + n^3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3}\Big) \pmod{n^4}$$

ба адилхаар

$$c_1+c_2+\dots+c_n \equiv \sum_{j=1}^{n}\Big(1+n\sum_{i=1}^{n} b_{ij} + n^2\sum_{i_1<i_2} b_{i_1j}b_{i_2j} + n^3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j}\Big) \pmod{n^4}$$

болно. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}$ ба $\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} 1$ тул,

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} + n\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3}\Big) \equiv \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i_1<i_2} b_{i_1j}b_{i_2j} + n\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j}\Big) \pmod{n^2} \quad (1)$$

гэж батлахад хангалттай. (1)-г дараах хоёр хэсэгт хуваая.

① $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i_1<i_2} b_{i_1j}b_{i_2j} \pmod{n^2}$ гэж батлъя. 2-р үржүү-вэл $\sum_{i=1}^{n} 2\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} = \sum_{i=1}^{n}\big((b_{i1}+\dots+b_{in})^2 - (b_{i1}^2+b_{i2}^2+\dots+b_{in}^2)\big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2$ тул, энэ нь

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \equiv \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2 \pmod{2n^2}$$

гэж харуулахтай эквивалент. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2$ учраас, $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \pmod{2n^2}$ гэж харуулна. (*) ёсоор $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$, $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}$ нь n-д хуваагдана. $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \equiv n\ (2n)$ бол $\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \equiv n^2 \pmod{2n^2}$ ба $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \equiv 0\ (2n)$ бол $\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \equiv 0 \pmod{2n^2}$ байна, иймд $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \equiv n^2\cdot\Big|\{i \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big|$ байна, энд mod $2n^2$.

Адилхаар $\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\Big)^2 \equiv n^2\cdot\Big|\{j \mid \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big| \pmod{2n^2}$ тул $\Big|\{i \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big| \equiv \Big|\{j \mid \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big| \pmod 2$ гэж харуулахад хангалттай. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}$ тул, үүнийг 2n модулиар жишвэл $n\cdot\Big|\{i \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big| \equiv n\cdot\Big|\{j \mid \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \equiv n(2n)\}\Big| \pmod{2n}$ гэж гарах тул үнэн байна. Энэ хэсэг батлагдав.

1р сургууль М.Өнөболд

② $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \pmod n$ гэж батлъя. Тэгвэл ① ба ②-с (1) батлагдана. Дараах хоёр тохиолдолд хуваая.

i) $(n,3)=1$ байг. Тэгвэл ② нь $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} \equiv \sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \pmod n$-тэй эквивалент. $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2}\sum_{\substack{j\neq j_1\\ j\neq j_2}} b_{ij} =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2}\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{ij} - b_{ij_1} - b_{ij_2}\Big) \overset{(*)}{\equiv} -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2}\big(b_{ij_1}^2 b_{ij_2} + b_{ij_1}b_{ij_2}^2\big)$$

$$\equiv -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\sum_{j'\neq j} b_{ij'} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\Big(\sum_{j'=1}^{n} b_{ij'} - b_{ij}\Big) \overset{(*)}{\equiv} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3 \pmod n$$

болно, адилхаар $\sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^3 \pmod n$ тул эндээс энэ тохиолдолд $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} \equiv \sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \pmod n$ болж батлагдана

ii) $3|n$ байг. ②-г 3-р үржүүлвэл энэ нь $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} \equiv \sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \pmod{3n}$-тэй эквивалент. $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \alpha_j$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \theta_i$ гэж тэмдэглэвэл $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2}(\theta_i - b_{ij_1} - b_{ij_2})$

$$= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1<j_2}\big(b_{ij_1}^2 b_{ij_2} + b_{ij_1}b_{ij_2}^2\big) = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\sum_{j'\neq j} b_{ij'} = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2(\theta_i - b_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \sum_{i=1}^{n}\theta_i\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3 = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big(\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3 = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big(3\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \theta_i^2\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3$$ ба адилхаар

$\sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big(3\sum_{i_1<i_2} b_{i_1j}b_{i_2j} - \alpha_j^2\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3$ болно. (*)-ёсоор $n|\theta_i, \alpha_j$ тул, мөн $3|n$ тул $\sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big(3\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \theta_i^2\Big) = \sum_{i=1}^{n}3\theta_i\sum_{j_1<j_2} b_{ij_1}b_{ij_2} - \sum_{i=1}^{n}\theta_i^3$ нь $3n$-д хуваагдана, адилхаар $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big(3\sum_{i_1<i_2} b_{i_1j}b_{i_2j} - \alpha_j^2\Big)$ нь $3n$-д хуваагдах тул $\sum_{i=1}^{n}3\sum_{j_1<j_2<j_3} b_{ij_1}b_{ij_2}b_{ij_3} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^3 \equiv$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n}3\sum_{i_1<i_2<i_3} b_{i_1j}b_{i_2j}b_{i_3j} \pmod{3n}$$ болж батлагдана.

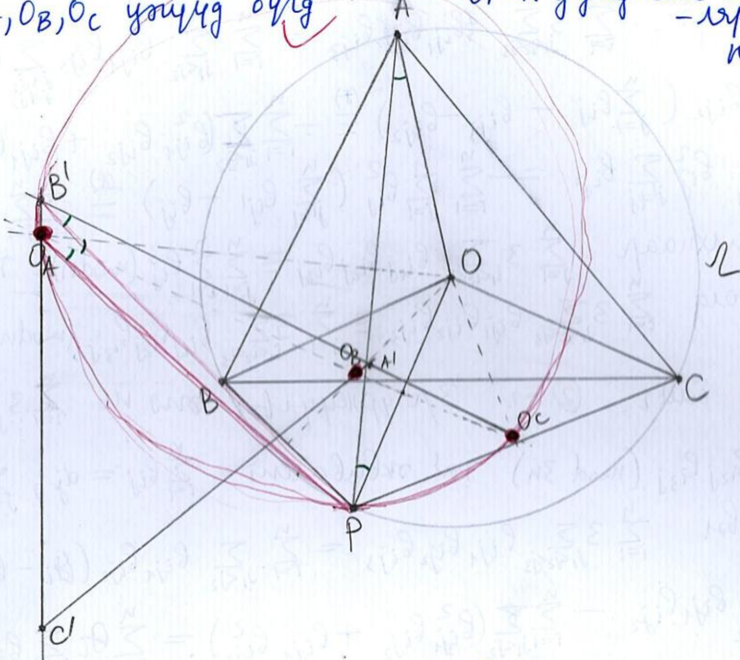
Ийнхүү (1) батлагдан бодлого бодогдов.

A3. $l_A \cap l_B = C'$, $l_B \cap l_C = A'$, $l_C \cap l_A = B'$ гэж тэмдэглэе.

$\measuredangle($, $\measuredangle(l,m)$-р l ба m-н хоорондох чиглэлт өнцгийг тэмдэглэе. $\measuredangle XYZ$-р $\measuredangle(XY,ZY)$ чиглэлт өнцгийг тэмдэглэе.

$OA = OB = OC = OP$ тул, $OA_{..}$ $OO_A \perp AP$, $OO_B \perp BP$, $OO_C \perp CP$ ба $\angle AOO_A = \angle O_AOP$, $\angle BOO_B = \angle O_BOP$, $\angle COO_C = \angle O_COP$ болно. Мөн $\angle B'A'C' = \angle(B'A', C'A')$ ба $B'A' \perp AB$, $C'A' \perp AC$ тул $\angle B'A'C' = \angle(BA, CA) = \angle BAC$ болно. Адилхаар $\angle A'B'C' = \angle ABC$ ба $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

Мөн O_A, O_B, O_C цэгүүд бүгд OP-н дундаас босгосон перпендикуляр дээр орших тул нэг шулуун байна



Эхлээд $A'O_BPO_C$ нь нэг тойрог дээр оршино гэж харуулъя

$\angle O_BA'O_C = \angle O_BA'B' = \angle C'A'B' = \angle CAB$ болно, харин $\angle O_BPO_C =$
$= \angle O_BPO + \angle OPO_C = \angle POO_B + \angle O_COP = \frac{1}{2}\angle POB + \frac{1}{2}\angle COP =$
$= \frac{1}{2}(\angle COP + \angle POB) = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CAB$ тул $\angle O_BA'O_C = \angle O_BPO_C$, иймд $A'O_BPO_C$ нэг тойрог дээр оршино. Адилхаар $O_AO_BC'P$ ба $O_AO_CB'P$ нэг тойрог дээр оршино. $A'B'C'O_AO_BO_C$ бүтэн дөрвөн өнцөгтийн хувьд $P = (O_AO_BC') \cap (O_AO_CB') \cap (O_BO_CA')$ тул P нь Микелийн цэг нь юм, Тиймээс $P \in (A'B'C')$.

Одоо $\angle A'PO = \angle A'B'P$ гэж харуулъя, тэгвэл OP нь $(PA'B')$ буюу $(A'B'C')$-г шүргэх бөгөөд бодлого бодогдоно.

$\angle A'B'P = \angle O_CB'P = \angle O_CO_AP$ (учир нь $P \in (O_AO_CB')$) ба O_A, O_B, O_C цэгүүд нь OP-н дундаас босгосон перпендикуляр дээр орших тул $O_AO_BO_C$ шулууны хувьд O, P цэгүүд тэгш хэмтэй, тиймээс $\angle O_CO_AP =$
$= \frac{1}{2}\angle OO_AP = \angle OAP = \angle APO$ болно. Иймд $\angle A'B'P = \angle APO = \angle OAP$.

$\angle A'PO = \angle A'PO_B + \angle O_BPO = \angle A'O_CO_B + \angle POO_B =$
$= \angle(B'A', O_BO_C) + \frac{1}{2}\angle POB = \angle PAB + \angle(B'A', O_BO_C)$ байна.

$O_BO_C \perp OP$ ба $B'A' \perp AB$ тул $\angle A'PO = \angle PAB + \angle(AB, OP) =$
$= \angle PAB + \angle(AB, BO) + \angle(BO, OP) = \angle PAB + \angle ABO + \angle BOP =$
$= \angle OAB + \angle PAB - 2\angle PAB = \angle OAB - \angle PAB = \angle OAP$ байна.

Тэгэхээр

$$\left.\begin{array}{l} \angle A'PO = \angle PAB + \angle(B'A', O_BO_C) = \angle OAP \\ \angle A'B'P = \angle APO = \angle OAP \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A'PO = \angle A'B'P$$

юм гарч бодлого бодогдов.

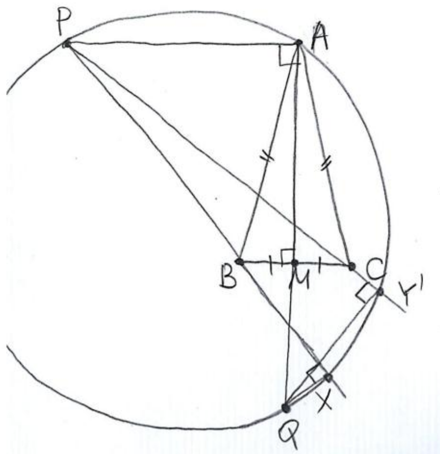
$\boxed{\text{1р сургууль М. Оноболд}}$

I − 7
II − 7
III − 7

Σ 21

1р сургууль М. Онобилэг

B1.



(XAP) нь PC-г P-с ялгаатай Y' цэгт, AM-г A-с ялгаатай Q цэгт огтолдог гэе. $AB=AC$ тул $AM \perp BC$, иймд $\angle QMB = \angle QMC = 90^\circ$. $AP \parallel BC$ ба $AM \perp BC$ тул $\angle PAM = 90^\circ$ гэж гарна, тэгэхээр $\angle PAQ = 90^\circ$ болно.

$\angle PAQ = \angle PXQ = \angle BXQ = 90^\circ$ байна, иймд $\angle BMQ = \angle BXQ = 90^\circ$ тул $BMXQ$ нэг тойрог дээр оршино. Тэгэхээр $\angle PXM = \angle BXM = \angle BQM$. Адилхан $BMCY'$ нэг тойрог дээр орших ба $\angle PY'M = \angle CY'M = \angle CQM$ болно.

$QM \perp BC$ ба $BM = CM$ тул ΔBQC адил хажуут, тэгэхээр $\angle QBM = \angle QCM$ буюу $\angle BQM = 90^\circ - \angle QBM = 90^\circ - \angle QCM = \angle CQM$ болно. Иймд $\angle PXM = \angle BQM = \angle CQM = \angle PY'M = \angle PYM$ болно, эндээс $Y = Y'$ гэж гарна. Иймээс $APXY$ нэг тойрогт багтана.

B2. Нийт $C_{2k}^2 = k(2k-1)$ тоглолт болох тул $k(2k-1)$ өдөр тэмцээн үргэлжилнэ. $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ өдрүүдэд оролцогчид ирсэн ба $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2k}$ гэе. $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ өдрүүдэд оролцогчид буусан ба $y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_{2k}$ гэе, энд x_i өдөрт ирсэн тамирчин y_i өдөрт буусан байх албагүй. Дурын тамирчин авахад, тэр нь ямар нэг x_i өдөрт ирж, y_j өдөрт буух тул $y_j - x_i + 1$ өдөр тамирчид байна, иймд зардал $N = \sum_{\text{тамирчин}} (y_j - x_i) + 2k = 2k + (y_1 + \ldots + y_{2k}) - (x_1 + \ldots + x_{2k})$ болно (учир нь тамирчдаар гүйлгэхэд $\sum y_j = y_1 + \ldots + y_{2k}$ ба $\sum x_i = x_1 + \ldots + x_{2k}$).

Иймд $y_1 + \ldots + y_{2k} - (x_1 + \ldots + x_{2k}) \ge \frac{k(k-1)}{2}(4k+5)$ гэж баталъя.

$1 \le i \le k$: $(x_i, x_i+1, \ldots, y_i)$ гэсэн цаг хугацааны интервалд, $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{2k}$ гэсэн $2k-i+1$ ш тамирчин ирж, $y_{2k}, \ldots, y_i$ гэсэн $2k-i+1$ ш тамирчин буусан байна. Иймд дор хаяж $2(k-i+1)$ ш тамирчин энэ хугацаанд багтаж ирээд буунa. Эдгээр тамирчид өөр хоорондоо $(k-i+1)(2k-2i+1)$ ш тоглолт, үлдсэн $2(i-1)$ тамирчидтай $4(k-i+1)(i-1)$ ш тоглох нь зөвхөн энэ интервалд байх боломжтой. Энэ интервалд $y_i - x_i + 1$ ш тоглолт бий тул

$$y_i - x_i + 1 \ge (k-i+1)(2k-2i+1+4i-4) = (k-i+1)(2k+2i-3)$$
$$= (k+1)(2k-3) + \left(2(k+1) - (2k-3)\right)i - 2i^2$$
$$= (k+1)(2k-3) + 5i - 2i^2$$

Иймд $\sum_{i=1}^{k}(y_i - x_i + 1) \geq k(k+1)(2k-3) + 5\cdot\frac{k(k+1)}{2} - 2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \approx 2k^3$

I — 7
II — 1
III — 0

Σ 8