Э. Эрдэнэбилэг. I цаас.

I - 7
II - 7
III - 6
Нийт 20

1) $f(x^2 f^2(y)) = f^2(x)\cdot f(y)$. (1).

~~$x \to \frac{1}{f^2(y)} \Rightarrow f($~~

(1) тэгшитгэлийг $P(x,y)$ гэж тэмдэглэе.

$P\left(\frac{1}{f^2(y)}, y\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{f^4(y)}\cdot f^2(y)\right) = f^2\left(\frac{1}{f^2(y)}\right)\cdot f(y) \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{f^2(y)}\right) = f^2\left(\frac{1}{f^2(y)}\right)\cdot f(y)$ ~~$f($~~ $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow f\left(\frac{1}{f^2(y)}\right)>0 \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{f^2(y)}\right)\cdot f(y) = 1 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{f^2(y)}\right) = \frac{1}{f(y)}}$ (2)

$P\left(1, \frac{1}{f^2(1)}\right) \Rightarrow$ ~~$f\left(f^2\left(\frac{1}{f^4(1)}\right)\right) = f^2(1)\cdot f(y)$~~

~~$f\, f\left(\frac{}{f^2}\right.$~~ $f\left(f^2\left(\frac{1}{f^2(1)}\right)\right) = f^2(1)\cdot f\left(\frac{1}{f^2(1)}\right)$

(2)-р ~~f~~ $\frac{1}{f(1)} = f\left(\frac{1}{f^2(1)}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{f^2(1)}\right)\right) = f^2(1)\cdot f\left(\frac{1}{f^2(1)}\right) =$

$f^2(1)\cdot\frac{1}{f(1)} \Rightarrow f^2(1) = 1 \Rightarrow \boxed{f(1)=1}$.

$f(x,1) \Rightarrow \boxed{f(x^2) = f^2(x)}$ (3) $\Rightarrow f(y)\neq 1$ байх y олдог

$f(y) = \alpha^{2^k}$ гэе. $\alpha\in\mathbb{Q}_{>0}$. $k\in\mathbb{N}_0$ $\alpha\neq z^2$ байх $z\in\mathbb{Q}_{>0}$

байг. $f(f^2(y)) = f(y) \Rightarrow f(\alpha^{2^{k+1}}) = \alpha^{2^k}$.

~~$f(x^2 f($~~ $P(1,y) \Rightarrow f(f^2(y)) = f(y)$

$\alpha^{2^k} = f(\alpha^{2^{k+1}}) \overset{(3)}{=} f^2(\alpha^{2^k}) \overset{(3)}{=} f^{2^2}(\alpha^{2^{k-1}}) = \dots = f^{2^{k+1}}(\alpha) \Rightarrow$ (3)-р

$f^2(\alpha) = \alpha \Rightarrow \varnothing \Rightarrow f = 1$ гэсэн ганц шийдтэй.
$f(x) = 1$.

$f(f(y))^2 = f(y)$

A2) i-р мөрний j-р баганад байгаа тоог (i,j) гэе.

1-р нөхцлөөс $(i,j) = \cancel{n\cdot a}\ n\cdot a_{(i,j)}+1$ гэе.

2-р нөхцлөөс $\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)} \vdots n$ $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)} \vdots n$ байна.

$$R_i = \prod_{j=1}^{n} \left(a_{(i,j)}\cdot n+1\right) \qquad C_j = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{(i,j)}\cdot n+1\right).$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(a_{(i,j)}\cdot n+1\right)\right) \equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_{(i,j)}\cdot n+1\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} C_j \ (n^4)$$

гэж батлая

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \equiv \sum_{i=1}^{n}\Big(1 + n\cdot\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)} + \cancel{n^2\cdot\sum_{i\neq j} a_{(i,j)} + n^3\cdot\sum_{\substack{z\neq x\\ i\neq y\\ x\neq y}} 0}$$

$$+\, n^2\cdot\sum_{x\neq y} a_{(i,x)}\cdot a_{(i,y)} + n^3\cdot\sum_{\substack{x\neq y\\ y\neq z\\ z\neq x}} a_{(i,x)}\cdot a_{(i,y)}\cdot a_{(i,z)} \Big) \ (n^4)$$

$\sum_{j=1}^{n} C_j$-г мөн адилаар бичье. Хоёуланд нь $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

байх. устгая. $\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)} = A_i$ гэе $\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)} = B_j$ гэе

$$n\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} = n\sum_{i=1}^{n} A_i = n\sum_{j=1}^{n} B_j = n\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{(x,y)\ \text{хос хосоороо алгаатай}\\ x\neq y}} a_{(i,x)}\cdot a_{(i,y)} \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{(z,t)\ \text{хос хосоороо алгаатай}\\ z\neq t}} a_{(z,j)}\cdot a_{(t,j)} \ (n^2)$$ гэж батлая.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^2 - \sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2}{2} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2}{2} \ (n^2).$$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2$ = бүх $a_{(i,j)}$ тоонуудын квадратуудын нийлбэр $= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} B_j^2 \ (2n^2)$

үргэлжлэл II цаасанд.

үргэлжлэл III хуудас

A3 үргэлжлэл) $O_B C' P O_A$ cyclic $\Rightarrow \angle O_A C' P = \angle P O_B O_A = \angle O O_B O_A$ =

$\angle$ ΔBPC-н дотоод өнцгийн тооцвол $\angle PBC = \gamma$ $\angle BPC = \alpha$

$\angle PCA = \pi - \alpha - \beta - \gamma \Rightarrow \angle POB = 360^\circ - 2\alpha - \cancel{2\beta} - 2\gamma \Rightarrow \angle BPO = \alpha + \cancel{\beta} + \gamma - 90$ =

$\angle OBP$ O_B нь $\omega(BOP)$-н төв $\Rightarrow \angle PO_BO = 2(\alpha+\gamma-90)$ $\angle OO_BO_A = \angle PO_BO_A \Rightarrow$

$\angle PO_BO_A = \alpha+\gamma-90$ $\cancel{\angle OPO_A = \beta \Rightarrow \angle}$ $\angle O_A C' P = \alpha+\gamma-90$.

$\angle C'PA + \angle APC = 180^\circ$ гэж батлая.

$\angle PBC = \angle PAC = \gamma$ $AP \cap C'O = X$ гэе. $\angle AB_2C' = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle AXB_2 = 90^\circ - \gamma$ $\angle XC'P = \angle XC'A_2 + \angle A_2C'P = \beta + \alpha + \gamma - 90 \Rightarrow$

$\cancel{\angle OPC}$ $\angle APC' = \pi - \alpha - \beta$. $\angle APC = \alpha + \beta \Rightarrow$ Мөн адилаар $BB' \ni P$ $AA' \ni P$

Иймүүд $AA' \cap BB' \cap CC' = P$ болохыг батлагдав

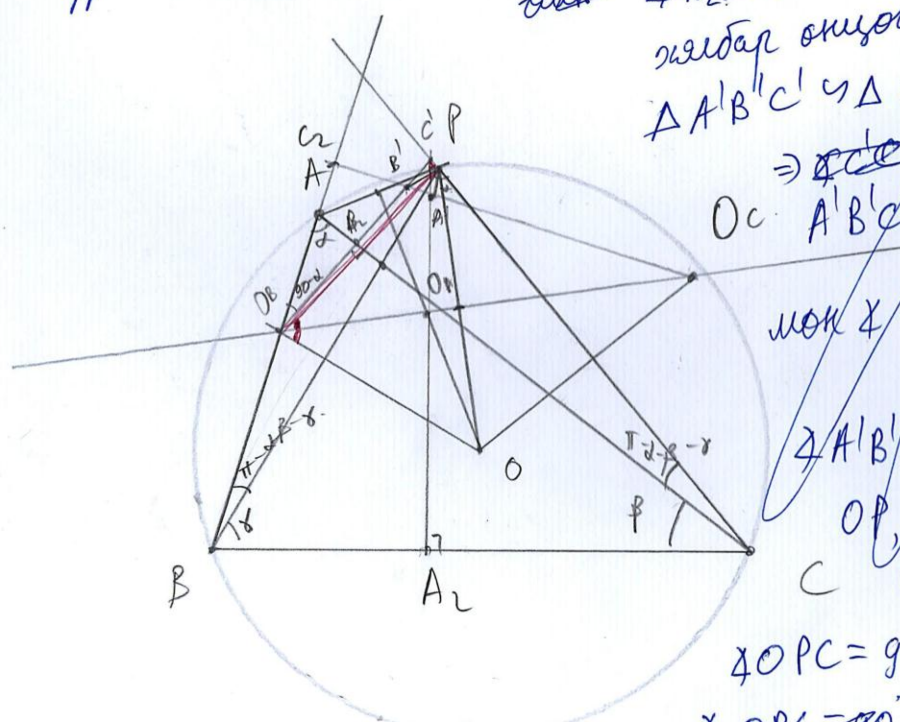
~~Эхн~~ $\angle A_2 C' C = \alpha+\gamma-90$.

хялбар өнцөг хөөлтөөр

$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

$\Rightarrow \cancel{CC'}$ $P \in CC' \Rightarrow$

$A'B'C'P$ cyclic



мөн $\angle PB'A' = \cancel{90-\beta}$ $\alpha+\gamma-90^\circ \Rightarrow$

$\angle A'B'P = \angle OPC \Rightarrow$

OP, $\omega(A'B'C')$ шүргэлцэнэ.

$\angle OPC = 90^\circ - (\angle B) \Rightarrow$

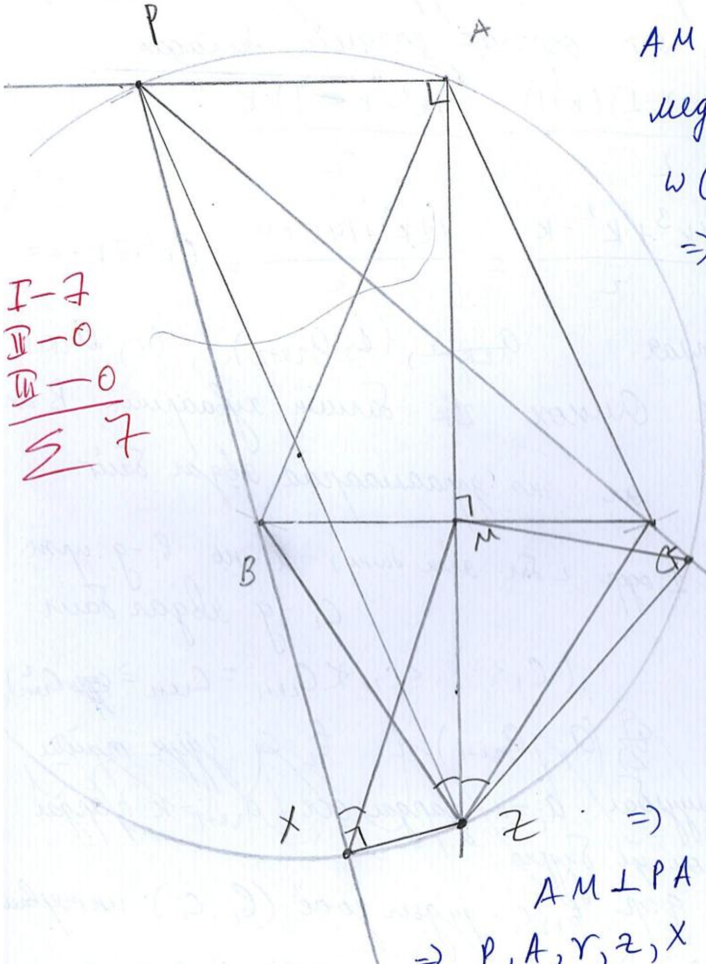
$\angle OPC = \cancel{90}$ $\alpha+\gamma-90^\circ$.

$\angle A_2C'P = \alpha+\gamma-90^\circ$

$A'B'C'P$ cyclic $\Rightarrow$ OP нь $\omega(A'B'C')$-г шүргэнэ.

Э. Эрдэнэбилэг. I цаас.

B1)



I – 7
II – 0
III – 0
Σ 7

ABC адил хажуут ⇒

$AM \perp BC$ ⇒ AM нь BC-н медиатрисс шулуун.

$\omega(MCY) \cap AM = Z$ гэе.

$\Rightarrow \angle CYM = \angle CZM,$

$BM = MC$ $MZ \perp BC \Rightarrow$

$\triangle BCZ$ адил хажуут.

$\Rightarrow \angle CZM = \angle BZM \Rightarrow$

$\angle CYM = \angle BXM = \angle CZM = \angle BZM \Rightarrow BMZX$ cyclic.

$\Rightarrow \angle BXZ = 90^\circ$

$MCYZ$ cyclic $\Rightarrow$

$\angle CYZ = 90^\circ$ ($\angle YMZ = \angle BMZ = 90^\circ$)

$\Rightarrow PA \parallel BC$ $AM \perp BC \Rightarrow$

$AM \perp PA \Rightarrow \angle PAZ = \angle PYZ = \angle PXZ = 90$

$\Rightarrow P, A, Y, Z, X$ нь PZ диаметртэй тойрог дээр оршино. $\Rightarrow PAYX$ cyclic.

B2) 2k багийн зардлын доод хэмжээг X_k гэе. $X_k = \frac{(4k^2+k-1)k}{2}$ гэж баталъя.

Үг бодлогыг индукц ашиглан бодъё. $X_{k+1} = X_k + (2k+1)(3k+2)$ гэж баталъя. Суурь $k = 1$-р авъя. $\frac{(4\cdot 1^2+1-1)\cdot 1}{2} = 2$ 2 багийн зардал 1,1 зоос ⇒ $2k+2$ багаа $a_1, \dots, a_{2k+2}$ гэе. Тэр хамгийн бага зардал гаргах хуваариа A гэе. Хуваарийн дагуу $C^2_{2k+2} = (k+1)(2k+1)$ тоглолт явагдана. a_{2k+1}, a_{2k+2} оролцсон өдрийг нь улаанаар. оролцоогүй өдрийг нь цэнхэрээр будъя. Улаан өдрүүдийг байхгүй гэж сэтгэвэл багадаа $X_k = \frac{(4k^2+k-1)k}{2}$ зардал гарна.

~~Улаан оролцсон од~~ Улаан одууд оролцохоор зардал хэрхэн нэмэгдэхийг сонирхоё. Тэгш эрхтэй тул сүүлийн одоор тоглосон 2 нь (a_{2k+1}, a_{2k+2}) байг. Тэр 2-н оролцох зардлын багадаа

$$x_{k+1} - x_k = \frac{(4(k+1)^2+(k+1)-1)(k+1)}{2} - \frac{(4k^2+k-1)k}{2} =$$

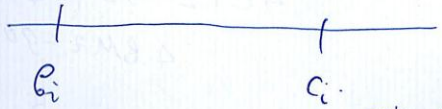
$$\frac{(4k^2+9k+4)(k+1)}{2} - \frac{4k^3+k^2-k}{2} = \frac{12k^2+14k+4}{2} = 6k^2+7k+2 =$$

$(2k+1)(3k+2)$ гэж батлая. ~~a_{2k+1},~~ (i, a_{2k+2}), (i, a_{2k+1})-г хавчуулна гэж сэтгэе. Өмнөх $2k$ багийн хуваарийг B гэе.

$B \in A$. $a_1, \dots, a_{2k}$-г яг энэ дараалаараа явдаг байг.

(~~a_1~~ a_i i-рт явна ~~1~~ одоор 2 бол явж байна). a_i нь b_i-д ирж c_i-д явдаг байг.

$(c_1 \le \dots \le c_{2k} < c_{2k+1} = c_{2k+2} = C^2_{2k+2})$



~~(a_i, a_{2k+1})-г b_i-с зүүн талд байрлуулбал a_i-н зардал өсч a_{2k+1}-н зардал мөн үл буурна.~~

натурал тоон шулуун дээр b_i, c_i-уудыг зооё. (b_i, c_i) интервалыг D_i гэе. (a_i, a_{2k+1}), (a_i, a_{2k+2})-г хамгийн цөөхөн D-д орох ~~з~~ газар зоовол хамгийн бага зардал нэмэгдэнэ. (Учир нь D_j интервалд орвол j-р багийн зардал өснө). мөн ~~$b_i c_i$~~ D_i интервал $D_1, \dots, D_{2k}$-тай бүгдэнтэй нь огтлолцоно $\Rightarrow$ (a_i, a_{2k+1}) (a_i, a_{2k+2}) нь хоёул орохдоо 1,1-г нэмнэ. $\Rightarrow$ ~~a_1~~ D_1 дээр 2 ($D_2, \dots, D_{2k}$ бүгд дээр нь 2) $\Rightarrow$ багадаа $2+4+\dots+4k = 2k(2k+1)$ нэмэгдэнэ. одоо ~~2~~ D_{2k+2}, D_{2k+1}-н интервалын тоог үзье $C^2_{2k+2} = (2k+1)k$. $\Rightarrow D_{2k+2}+D_{2k+1} \ge (2k+1)(k+2)$

$\Rightarrow$ Нийт $(2k+1)(3k+2)$.

Э. Эрдэнэбилэг II цаас

B3) $a_n \leq 1$ гэж батлая. Индукцлая. суурь $n = 1$ үед $a_1 = 1$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \dots + a_{n-k}}{k} \leq \frac{k}{k}$$ Мөн бид $a_{2018} = \frac{a_{2017}}{1} = a_{2017}$.

байлгаж чадах тул $1 \overset{max}{>} (a_{2018} - a_{2017}) \geq 0$.

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \quad a_3 = a_2 = \frac{1}{2} \dots \qquad a_{2017} = \frac{1}{2}$.

$$a_{2018} = \frac{a_{2017} + \dots + a_2 + a_1}{2017} = \frac{1009}{2017}. \qquad a_{2018} - a_{2017} = \frac{2018}{2 \cdot 2017} - \frac{2017}{2 \cdot 2017} = \frac{1}{2 \cdot 2017}$$

А2) үргэлжлэл) Э. Эрдэнэбилэг II цаас

$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} B_j^2 \ (2n^2)$. $\quad A_i = n \cdot X_i \ (i=\overline{1,n})$ $\quad B_j = n \cdot Y_j \ (j=\overline{1,n})$ гэе.

$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} n^2 \cdot X_i^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} n^2 \cdot Y_j^2 \ (2n^2)$.

$X_i^2 \equiv X_i \ (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j \equiv \sum_{j=1}^{n} Y_j^2 \ (2) \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{(i,x,y,z)} a_{(i,x)} \cdot a_{(i,y)} \cdot a_{(i,z)} \equiv \sum_{j=1}^{n} \sum_{(j,l,s,t)} a_{(l,j)} \cdot a_{(s,j)} \cdot a_{(t,j)} \ (n)$ гэж батлая.

(i,x,y,z) хос хоорондоо ялгаатай $x \neq y \neq z$, $x \neq z$.

$l \neq s$, $s \neq t$, $l \neq t$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^3 - \sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^3 - 3\sum_{j\neq k} (a_{(i,j)}^2 \cdot a_{(i,k)})}{6} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^3 - \sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^3 - 3\sum_{x\neq y} (a_{(x,j)}^2 \cdot a_{(y,j)})}{6} \ (n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^3 - 3\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^3 - 3\sum_{j\neq k} (a_{(i,j)}^2 \cdot a_{(i,k)})}{6} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^3 - 3\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot A_i}{6}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} n^2 \cdot X_i^3 - 3\sum_{j=1}^{n} (a_{(i,j)}^2) X_i \equiv \sum_{j=1}^{n} n^2 \cdot Y_j^3 - 3\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot Y_j \ . (6).$$

Ферматын бага теоремоор. $X_i^3 \equiv X_i \ (3) \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j \equiv \sum_{j=1}^{n} Y_j^3 \ (3) \Rightarrow 3\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot X_i,\ 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot Y_j$

$\sum_{i=1}^{n} n^2 X_i^3 \equiv \sum_{i=1}^{n} n^2 X_i = \sum_{j=1}^{n} n^2 Y_j \equiv \sum_{j=1}^{n} n^2 Y_j^3 \ (2)$

$\cancel{\sum\sum a}$ $\cancel{\sum\sum a}$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot x_i \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot r_j \ (2)$ гэж батлая

$a_{(i,j)}^2 \equiv a_{(i,j)} \ (2) \Rightarrow$

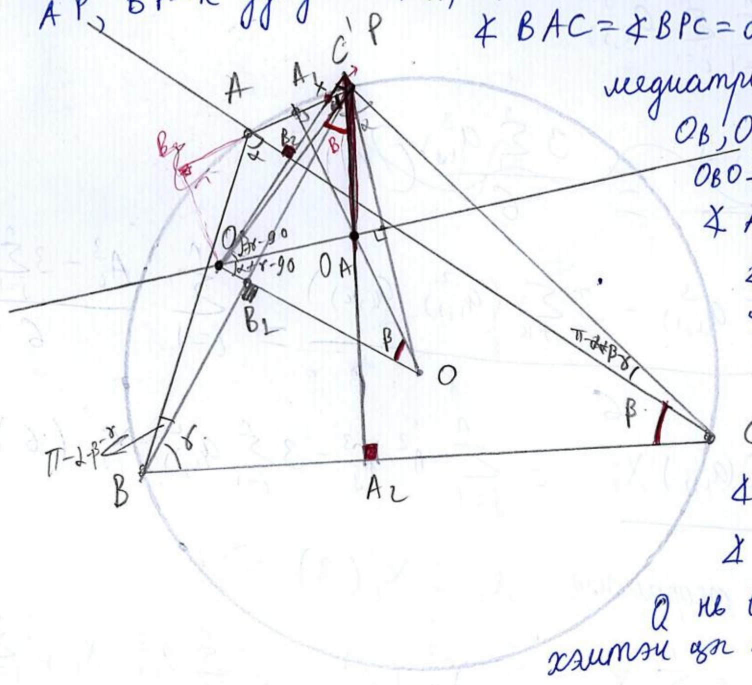
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot x_i \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n \ (2)$

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)}^2 \cdot r_j \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{(i,j)} \cdot r_j = \sum_{j=1}^{n} B_j \cdot r_j = \sum_{j=1}^{n} n \cdot r_j^2 \ (2)$.

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} r_j \equiv \sum_{j=1}^{n} r_j^2 \ (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} n \cdot x_i^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} n \cdot r_j^2 \ (2)$

Иймд батлагдав.

3) Эхлээд ~~ℓ_1~~ $\ell_A \cap \ell_B = C'$ $\ell_A \cap \ell_C = B'$ $\ell_B \cap \ell_C = A'$ гэе. $AA' \cap BB' \cap CC' = P$ гэж батлая. $P \in CC'$ гэж ~~8~~ AP, BP-н дундаж A_1, B_1 гэе. $\angle PBC = \gamma$ $\angle ACB = \beta$ $\angle BAC = \angle BPC = \alpha$ гэе. OP-н медиатрисс шулууныг ℓ гэе.



$O_B, O_A \in \ell$ нь илт ($O_BO = O_BP$, $O_BO \perp BP$, $O_AO \perp AP$, $O_AO = O_AP$.)

$\angle ACB = \angle APB = \beta$

~~$\angle PA_1O_A = \angle PB_1O$~~

~~$\angle A_1PB_1 = \angle$~~

$\angle PA_1O = \angle PB_1O = 90$

$\Rightarrow A_1POB_1$ cyclic $\Rightarrow$

$\angle A_1PB_1 = \angle A_1OB_1$

$\angle A_1PB = \beta \Rightarrow \angle A_1OB_1 = \beta$

O нь ℓ-н хувьд тэгш хэмтэй цэг нь P $\Rightarrow$

$\angle O_BPO_A = \angle O_BOO_A = \beta$ $\ell_B \perp AC \Rightarrow \ell_B \cap AC = B_2$

$\ell_A \cap BC = A_2$ гэе. $\angle C'B_2C = \angle C'A_2C = 90° \Rightarrow C'B_2A_2C$ cyclic $\Rightarrow$

$\angle B_2C'A_2 = \angle B_2CA_2 = \beta$ $\angle O_BC'O_A = \angle O_BPO_A = \beta \Rightarrow O_BC'PO_A$ cyclic

үргэлжлэл III цаасанд