Б. Батжэнд   Удаа 8/3
1-р сургууль.

B2 Хамгийн эхэнд ирсэн хүнийг a_1; 2-р байранд ирсэн хүнийг a_2; ...
... i-т ирсэн хүнийг a_i-гэе. $\Rightarrow \{a_1; a_2; \dots; a_{2k}\} = \{1; 2; \dots; 2k\}$

Хамгийн эхэнд буусан хүнийг b_1; 2-т буусан хүнийг b_2; ...
... i-т буусан хүнийг b_i-гэе. $\Rightarrow \{b_1; b_2; \dots; b_{2k}\} = \{1; 2; \dots; 2k\}$.

~~a_i-хүн $И(a_i)$-өдөр ирсэн бай $\Rightarrow (И(a_1) \leq И(a_2) \leq \dots \leq И(a_{2k}))$.~~
~~b_i-хүн $Б(b_i)$-өдөр буусан бай $\Rightarrow (Б(a_1) \leq Б(a_2) \leq \dots \leq Б(a_{2k}))$.~~
~~Энд аль ч хүн бүх хүнтэй тоглочихоод буунa. $\Rightarrow И(a_{2k}) \leq Б(a_1)$. $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow \forall i, j \in \{1; \dots; 2k\}$: $И(a$~~

i-р хүн $И(a_i)$-өдөр эхний тоглолтоо, $Б(i)$-өдөр сүүлийн тоглолтоо хийсэн бай. $\Rightarrow$ $И(a_1) \leq И(a_2) \leq \dots \leq И(a_{2k})$
$Б(b_1) \leq Б(b_2) \leq \dots \leq Б(b_{2k})$

Энд аль ч хүн бүх хүнтэй тоглоно $\Rightarrow \forall i; j \in \{1; \dots; 2k\}$: $И(a_i) \leq Б(a_j)$.
(Хэрэв $И(a_i) > Б(b_j)$-бол a_i-р хүн b_j-р хүнтэй тоглож чадахгүй)
$(a_1; a_2; \dots; a_{i-1})$
$\Rightarrow \left(1 \to И(a_i) - 1\right)$-өдрүүдэд нийт яг $i-1$-н ялгаатай хүнүүд байсан
~~$\Rightarrow$ өдрүүдэд C^2_{i-1}-ш тоглолт байна. Энд $C^2_0 = C^2_1 = 0$~~

~~$Б(b_i)+1$ - өдрүүдэд~~
$\left(Б(b_{2k+1-i}) + 1 \to C^2_{2k}\right)$ - өдрүүдэд нийт яг $i-1$-н ялгаатай хүнүүд байсан $(b_{2k+1-(i-1)}; b_{2k+1-(i-2)}; \dots; b_{2k+1-1}) \Rightarrow$.

~~Энд $\{a_1; \dots; a_{i-1}\} \cap \{b_{2k+1-(i-1)}; b_{2k+1-(i-2)}; \dots; b_{2k+1-1}\} = \{c_1; c_2; \dots; c_k\}$ - гэе. $\Rightarrow$~~
~~$\{a_1; \dots; a_{i-1}\} = a$~~
~~$\{b$~~

~~Энд $И(a_i)$-өдөр $\leq Б(b_{2k+1-i})$-түл $\forall$~~
~~Энд $1 \to И(a_i) - 1$ - өдрүүдэд яг C^2_{i-1}-ш тоглолт байна.~~
~~$Б(b_{2k+1-i}) + 1 \to C^2_{2k}$ - өдрүүдэд яг C^2_{i-1}-ш тоглолт байна.~~
~~Энд $c_1; c_2$;~~

$\Rightarrow 1 \to И(a_i) - 1$ ба $Б(b_{2k+1-i}) + 1 \to C^2_{2k}$ - өдрүүдэд ~~яг~~ нийтдээ яг $2C^2_{i-1} - C^2_{2(i-1)-2k}$ -ш тоглолт байна. (ард баталгаа).

$\Rightarrow$ ~~...~~

~~$2k\, C_{2k}^2 - Б(b_{2k+1-i})$~~

$$C_{2k}^2 - \left(Б(b_{2k+1-i}) - U(a_i) + 1\right) \leqslant 2C_{i-1}^2 - C^2_{2(i-1)-2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Б(b_{2k+1-i}) - U(a_i) + 1 \geqslant C_{2k}^2 - \left(2C_{i-1}^2 - C^2_{2(i-1)-2k}\right).$$

Энд i-р хүн нь $Б(i) - U(a_i) + 1$-ийг хожсон $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Нийт зардал} = \sum_{i=1}^{2k}\left(Б(i) - U(i) + 1\right) = \sum_{i=1}^{2k} Б(i) - \sum_{i=1}^{2k} U(i) + 2k =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k}\left(Б(b_i)\right) - \sum_{i=1}^{2k}\left(U(a_i)\right) + 2k = \sum_{i=1}^{2k} Б(b_{2k+1-i}) - \sum_{i=1}^{2k} U(a_i) + 2k =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k}\left(Б(b_{2k+1-i}) - U(a_i) + 1\right) \geqslant \sum_{i=1}^{2k}\left(C_{2k}^2 - \left(2C_{i-1}^2 - C^2_{2(i-1)-2k}\right)\right) =$$

$$= 2k\, C_{2k}^2 - 2\sum_{i=1}^{2k} C_{i-1}^2 + \sum_{i=1}^{2k} C^2_{2(i-1)-2k} =$$

$$= 2k \cdot \frac{2k(2k-1)}{2} - 2\left(C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{2k-1}^2\right) + \left(C_2^2 + C_4^2 + \ldots + C_{2k-2}^2\right) =$$

$$= 2k \cdot \frac{2k(2k-1)}{2} - 2\left(\frac{2(2-1)}{2} + \frac{3(3-1)}{2} + \ldots + \frac{(2k-1)(2k-2)}{2}\right) + \left(\frac{2(2-1)}{2} + \frac{4(4-1)}{2} + \ldots + \frac{(2k-2)(2k-2-1)}{2}\right) =$$

$$= 2k^2(2k-1) - \left(\left((2k-1)^2 + (2k-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1\right) - \left((2k-1) + (2k-2) + \ldots + 1\right)\right) + \frac{1}{2}\left((2k-2)^2 + \ldots + 4^2 + 2^2 - \left((2k-2) + \ldots + 4 + 2\right)\right)$$

$$= 2k^2(2k-1) - \left(\frac{(2k-1)\cdot 2k(4k-1)}{6} - \frac{(2k-1)\cdot 2k}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(4\left(\frac{(k-1)\cdot k(2k-1)}{6}\right) - 2\cdot\frac{(k-1)\cdot k}{2}\right) =$$

$$= 2k^2(2k-1) - \frac{(2k-1)\cdot 2k(4k-4)}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{2k(k-1)(4k-2)}{3} - k(k-1)\right) =$$

$$= 2k^2(2k-1) - \frac{(2k-1)\cdot 2k(2k-2)}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{k(k-1)(4k-5)}{3}\right) =$$

$$= 2k(2k-1)\cdot\left(\frac{3k}{3} - \frac{2k-2}{3}\right) + \frac{k(k-1)(4k-5)}{6} =$$

$$= 2k(2k-1)\cdot\frac{(k+2)}{3} + \frac{k(k-1)(4k-5)}{6} = \frac{4k(2k-1)(k+2)}{6} + \frac{k(k-1)(4k-5)}{6} =$$

$$= \frac{8k^3 + 12k^2 - 8k}{6} + \frac{4k^3 - 9k^2 + 5k}{6} = \frac{12k^3 + 3k^2 - 3k}{6} = \frac{(4k^2 + k - 1)k}{2}.$$

▲

Б. Батмэнд Хуудас 3/3
1-р сургууль

I –
II – 4
III – 0
Нийт

Энд

$1 \to u(a_1)-1$ одоор ихэдээ C_{i-1}^2 -ш } -тоглолт байна.
$\mathcal{B}(b_{2k+1-i})+1 \to C_{2k}^2$ одоор ихэдээ C_{i-1}^2 -ш

$\{a_1; \dots ; a_i\} = A$; $\{b_{2k+1-i}; \dots ; b_{2k+1}\} = B$ - гэвэл.

$|A \cup B| \leq 2k$ - байх нь илт $\Rightarrow$
$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| \leq 2k + |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| \geq |A| + |B| - 2k = 2i - 2 - 2k$

$A \cap B = \{c_1; c_2; \dots ; c_{2i-2-2k}\}$ -гэвэл.
$u(a_i) \leq \mathcal{B}(b_{2k+1-i})$ -тул $(c_i - c_j)$ -гэсэн тоглолт нь
$1 \to u(a_1)-1$; $\mathcal{B}(b_{2k+1-i})+1 \to C_{2k}^2$ -ийн ихэдээ нэгэнд нь л орно $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ доор хаяж $C_{2i-2-2k}^2$ -ш тоглолт 2 удаа тоологдсон
$\Rightarrow 1 \to u(a_1)-1$; $\mathcal{B}(b_{2k+1-i})+1 \to C_{2k}^2$ -т ихэдээ $2C_{i-1}^2 - C_{2i-2-2k}^2$ -ш тоглолт байна.

Хариу
Хариу Ю.

B3 | эхлээд $a_0; a_1; \dots$ дарааллын аль ч гишүүний хувьд 0-ээс их, 1-ээс ихгүй гэж баталъя.

Эсрэгээс нь 1-ээс их a_n - олдсон бол
$a_0 = 0$; $a_1 = 1$ -тул хамгийн бага индекстэй нь a_m -гэе. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\forall i \in \mathbb{N}$: $i < m \Rightarrow a_i \leq 1 \Rightarrow$
$i = 0$ -үед $a_i = 0 \Rightarrow$. $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $a_i \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_m = \dfrac{a_{m-1} + \dots + a_{m-k}}{k} \leq \dfrac{1 + \dots + 1}{k} = 1 \Rightarrow$ зөрчил. Яг адилаар $a_m > 0$ -гэж гарна.
$\Rightarrow a_0; a_1; \dots$ -н гишүүд бүгд $[0;1]$ завсарт харъяалагдана.

Хариу 0-ээс бага, $a_0 = 0$
гүй ш $a_1 = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$: $i \geq 1 \Rightarrow a_i = 1$ -гэвэл. $a_{2018} - a_{2017} = 0$ ба
$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1}$.

Одоо $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \geq 2 \Rightarrow a_n \leq a_{n-1}$ - гэж баталъя.
Эсрэгээс нь $a_n > a_{n-1}$ - байх n - олдсон гэе $\Rightarrow$ хамгийн багыг нь x -гэе.

$\Rightarrow a_x > a_{x-1}$; $a_{x-1} \leq a_{x-2} \leq \dots \leq a_1 = 1$.

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{a_{x-1} + a_{x-2} + \dots + a_{x-k}}{k}. \qquad \text{гзв}$$

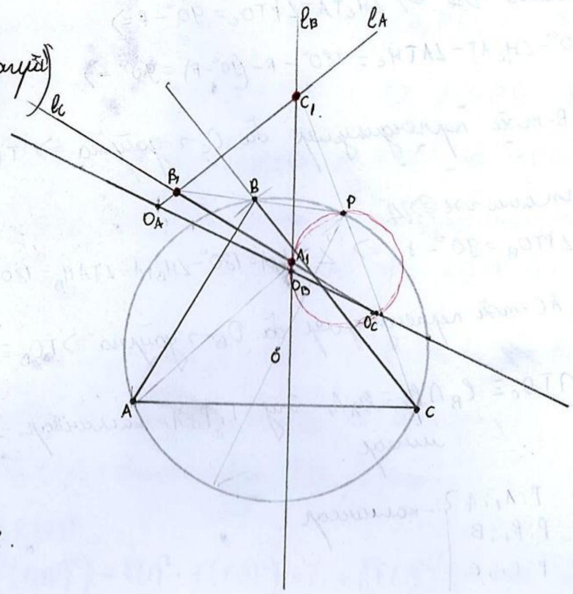
$$0 \le a_{2018} - a_{2019} \le 1 - 0 = 1.$$

$$0 \le \max\{a_{2018} - a_{2019}\}. \Rightarrow \quad 0 \le \max\{a_{2019} - a_{2019}\} \le 1.$$

Б. Батмэнд
1-р сургууль
ҮБ.

Цаас 1/3.

(P-нь $\overset{\frown}{BC}$-н A-г агуулаагүй нум дээр оршдог гэе)

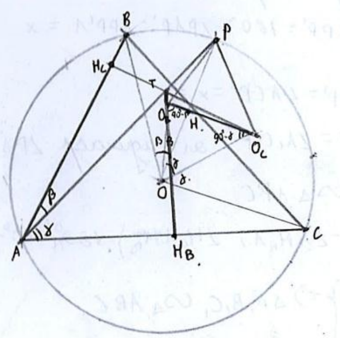


$\left.\begin{array}{l} \ell_A \cap \ell_B = C_1 \\ \ell_B \cap \ell_C = A_1 \\ \ell_A \cap \ell_C = B_1 \end{array}\right\}$ - гэе.

Одоо $\left.\begin{array}{l} A; A_1; P \\ B; B_1; P \\ C; C_1; P \end{array}\right\}$ - коллинеар гэж баталъя.

Үүний тулд $A; A_1; P$-нь коллинеар гэж батлахад бусад нь адил.

AP-хэрчим нь $\omega(O_B P O_C)$-тэй T-цэгээр огтлолцоно гэе.



$\left.\begin{array}{l} \angle PAB = \beta \\ \angle PAC = \gamma \end{array}\right\}$ - гэе.

Энд $\angle BOP = \overset{\frown}{BP} = 2\angle BAP = 2\beta$.
$\angle COP = \overset{\frown}{CP} = 2\angle CAP = 2\gamma$.

Энд $BO = PO \Rightarrow \triangle BOP$ - адил/х $\Rightarrow O_B$-нь $\angle BOP$-н биссектрис дээр оршино $\Rightarrow \angle O_B OP = \dfrac{\angle BOP}{2} = \beta$.

адилаар. $\angle O_C OP = \gamma$.

Энд $\left.\begin{array}{l} OO_B = O_B P \\ OO_C = O_C P \\ O_B O_C = O_B O_C \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle O_B O O_C = \triangle O_B P O_C \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle PO_B O_C = \angle OO_B O_C \\ \angle PO_C O_B = \angle OO_C O_B \end{array}\right\}$ (1). Энд $OP \cap O_B O_C = H$ - гэе

Энд $OO_B = O_B P$ ба $O_B H$-нь $\angle PO_B O$-н биссектрис $\Rightarrow O_B H$ - өндөр $\Rightarrow \angle O_B HO = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OO_B H = 180^\circ - \angle O_B OH - \angle O_B HO = 90^\circ - \beta$. Энд $O_B H$-биссектрис $\Rightarrow \angle PO_B H = 90^\circ - \beta$

$\angle O_B HO = 90^\circ \Rightarrow \angle O_C HO = 90^\circ \Rightarrow \angle OO_C H = 180^\circ - \angle OHO_C - \angle HOO_C = 90^\circ - \gamma$. Энд
энд $PO_C = OO_C$ ба CH-өндөр $\Rightarrow$ CH-биссектрис $\Rightarrow \angle PO_C H = 90^\circ - \gamma$.

TPO_cO_B - cyclic $\Rightarrow \angle PTO_c = \angle PO_BO_c = 90^\circ - \beta$ $\quad \angle O_BTP = 180^\circ - \angle O_BO_cP = 90^\circ + \gamma$.

O_cT-нь AB-г H_c-р огтлолцох гэе. $\Rightarrow \angle H_cTA = \angle PTO_c = 90^\circ - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AH_cT = 180^\circ - \angle H_cAT - \angle ATH_c = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TO_c-нь AB-тэй перпендикуляр ба O_c-г дайрна $\Rightarrow TO_c \equiv \ell_c$.

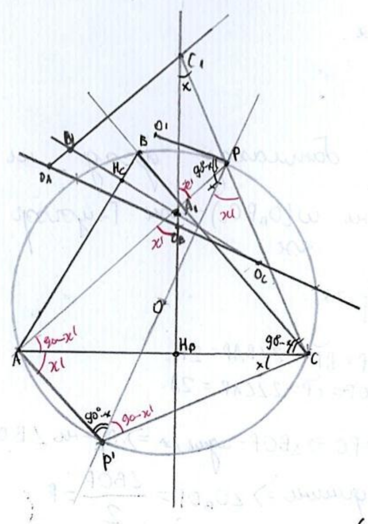
O_BT-нь AB-г H_B-р огтлолцох гэе

$\angle ATH_B = 180^\circ - \angle PTO_B = 90^\circ - \gamma \Rightarrow \angle TH_BA = 180^\circ - \angle H_BTA - \angle TAH_B = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - \gamma = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TO_B-нь AC-тэй перпендикуляр ба O_B-г дайрна $\Rightarrow TO_B \equiv \ell_B \Rightarrow$

$\Rightarrow T \equiv TO_B \cap TO_c \equiv \ell_B \cap \ell_c \equiv A_1$ энд $T; P; A$- коллинеар $\Rightarrow$ $P; A_1; A$ - коллинеар.

$\Rightarrow$ адилаар $\left.\begin{matrix} P; A_1; A \\ P; B_1; B \\ P; C_1; C \end{matrix}\right\}$ - коллинеар.



P-цэгийн диаметрийн эсрэг орших цэгийг P'-гэе

$\angle CC_1H_B = x$-гэе $\Rightarrow \angle C_1CH_B = 180^\circ - \angle CC_1H_B - \angle C_1H_BC = 90^\circ - x$

$\angle C_1CH_B = \angle PCA = 90^\circ - x$.

$\frac{\overset{\frown}{AP}}{2} = \angle PCA = \angle PP'A = 90^\circ - x$

энд PP'-диаметр $\Rightarrow \angle PAP' = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APP' = 180^\circ - \angle PAP' - \angle PP'A = x$

$\frac{\overset{\frown}{AP'}}{2} = \angle APP' = \angle ACP' = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACP' = \angle A_1C_1P$. Яг адилаар $\angle PA_1C_1 = P'AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1PC_1 \sim \triangle AP'C$.

Энд. $\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - \angle H_cA_1H_B = 180^\circ - (360^\circ - \angle AH_cA_1 - \angle AH_BA_1 - \angle H_cAH_B) = 180^\circ - (360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle A) =$

$= \angle A$. Яг адилаар $\left.\begin{matrix} \angle B_1C_1A_1 = \angle C \\ \angle C_1B_1A_1 = \angle B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim_\triangle ABC$.

Энд $\left.\begin{matrix} A_1B_1C_1 \sim_\triangle ABC. \\ C_1PA_1 \sim_\triangle CP'A. \end{matrix}\right\}$ (2) мөн $\left.\begin{matrix} \angle B_1PA_1 = \angle BP'A = \angle BP'A. \\ \angle B_1A_1P = \angle B_1A_1C_1 + \angle C_1A_1P = \angle A + \angle CAP = \angle BAP' \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \triangle B_1A_1P \sim_\triangle BAP' \\ \text{адилаар } \triangle B_1C_1P \sim_\triangle BCP' \end{matrix}\right\}$ (3)

(2) ба (3) -аас ~~$B_1C_1PA_1 \sim BCP$~~ $B_1C_1PA_1 \sim BCP'A$.

Б. Батлхэнд
1-р сургууль
УБ.

цаас 2/3

$\triangle B_1C_1A_1$-г багтаасан ⊙-н төвийг O_1-гэе. $\Rightarrow \angle O_1PA_1 = \angle OP'A = 90^\circ - x \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1PP' = \angle O_1PA_1 + \angle APP' = 90^\circ - x + x = 90^\circ. \Rightarrow \angle O_1PO = 90^\circ$

Энд $ABCP' \sim A_1B_1C_1P$ ба ~~$P \in (A_1B_1C_1P)$-нь~~ $ABCP$-нь cyclic $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1C_1P'$ – cyclic; Мөн $\angle O_1PP' = 90^\circ$ } Энд P'-нь $(\triangle A_1B_1C_1)$-г багтаасан ⊙-дээр оршино. $\angle O_1PP'$ O_1 – ⊙-н төв ба $\angle O_1PP' = 90^\circ$ } $\Rightarrow PP'$-нь $(\triangle A_1B_1C_1)$-г багтаасан ⊙-г шүргэнэ $\Rightarrow$

$\Rightarrow OP$-нь $(\triangle A_1B_1C_1)$-г багтаасан ⊙-г шүргэнэ.

A1| ~~[illegible]~~. $f(x)=1$-гэсэн ганц л хариутай.

$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$ – тэнцэлийг $P(x;y)$-гэе.

- $P(1;1) \Rightarrow f(f(1)^2) = f(1)^3$
- $P(1; f(1)^2) \Rightarrow f(f(f(1)^2)^2) = f(1)^2 \cdot f(f(1)^2) \Rightarrow f((f(1)^3)^2) = f(1)^2 \cdot f(1)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(f(1)^6) = f(1)^5. \quad (1)$$

- $P(f(1)^2; 1) \Rightarrow f((f(1)^2)^2 \cdot f(1)^2) = f(f(1)^2)^2 \cdot f(1) \Rightarrow$ ~~$f(f(1)^6) = f(1)^5$ (2)~~.

~~(1) ба (2)-оос $f(f(1)^6) = f(1)^5 = f(1)^6$~~

$$\Rightarrow f(f(1)^4 \cdot f(1)^2) = (f(1)^3)^2 \cdot f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(1)^6) = f(1)^7 \quad (2).$$

(1) ба (2)-оос $f(f(1)^6) = f(1)^5 = f(1)^7$. Энд $f(1) \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(1)=1}$$

$\cancel{\Rightarrow P(x;1) \Rightarrow f(x^2 \cdot 1^2) = f(x)^2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{f(x^2) = f(x)^2} \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow f(x^2 f(y)^2) = f(x f(y))^2.}$

$\cancel{f(y) = f(\sqrt{y}^2) = f(\sqrt{y})^2 \Rightarrow f(x)^2 f(y) = f(x)^2 \cdot f(\sqrt{y})^2} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow f(x f(y))^2 = (f(x) \cdot f(\sqrt{y}))^2;\ f(xf(y)), f(x), f(\sqrt{y}) \in \mathbb{Q}_{>0}} \Rightarrow \cancel{\boxed{f(xf(y)) = f(x) \cdot f(\sqrt{y})}}$ – ~~тэнцэлийг $S(x;y)$-гэе.~~ $\Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow S(1;y) \Rightarrow \boxed{f(f(y)) = f(\sqrt{y})}}$ ~~$\Rightarrow f$-г инъектив гэж ар харуулбал $f(y) = \sqrt{y}$.~~

~~$f(y)$ ... $P(1;y) \Rightarrow f(f(y^2)) = f(y) \Rightarrow$ c-нь f-н утгын мужид орох бол $f(c^2) = c$.~~

~~f-г сюръектив гэж харуулбал $f(x)=\frac{1}{x}$~~

~~$f(2)=a$ гэе $\Rightarrow a \in Q_{>0}$~~

~~Энд a-нь төгсгөлөг гэдэг нь илт $\Rightarrow$~~

~~Энд a-нь төгсгөлөг, эерэг рационал тоо $\Rightarrow$ хангалттай их n-н хувьд $a^{\frac{1}{2^n}}$-нь рационал.~~

~~Хэрэв $a=1$ бол.~~

• Хэрэв ~~бүхэл рац тоо~~ $\forall q \in Q_{>0}$: $f(q)=1$-байдаг бол энэ нь шийд болох нь хялбар гарна.

• Хэрэв $f(q)=a$ $(a \neq 1)$ байх $q \in Q_{>0}$-тоо олддог бол

Энд a-нь эерэг рационал $\Rightarrow a=\frac{a_1}{a_2}$-гэе $(a_1; a_2 \in N)$ ба $\gcd(a_1;a_2)=1$.

Энд $a \neq 1 \Rightarrow a_1;a_2$-ын ядаж 1-нь 1-ээс ялгаатай $\Rightarrow$ үр тоог x-гэвэл. x-нь 1-ээс ялгаатай натурал тоо $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хангалттай том $n \in N$-н хувьд $x^{\frac{1}{2^n}}$-нь иррационал.

$\Rightarrow$ Энд $\gcd(a_1;a_2)=1$-тул $a^{\frac{1}{2^n}}$-нь иррационал.

ба нөхцөлийн нь y-гээ $\Rightarrow \{x; y\} = \{a_1; a_2\}$

~~$P(\frac{1}{a}; q) \Rightarrow f(\frac{1}{a})^2 \cdot f(q)^2 = f(\frac{1}{a})^2 f(q) \Rightarrow f(1)=f(\frac{1}{a})^2 \cdot a \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$-рационал. $P(\sqrt{\frac{1}{a}}; \frac{1}{a}) \Rightarrow f(1) = f(\sqrt{\frac{1}{a}})^2 \cdot \frac{1}{a}$~~

Индукцлэе.

Суурь: a-нь 1-ээс ялгаатай рационал тоо.

Таамаг: $a^{\frac{1}{2^k}}$-нь 1-ээс ялгаатай рационал тоо байг.

Шилжилт: $a^{\frac{1}{2^{k+1}}}$-нь 1-ээс ялгаатай рационал тоо байна.

$a^{\frac{1}{2^k}}$-рационал $\Rightarrow \frac{1}{a^{\frac{1}{2^k}}}$-рационал. $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow P(a^{\frac{1}{2^k}}$~~ f

Б. Батлхүү
1-р ангилал
11-р анги.

Цаас 3/3

Хэрэв $f(q)=a$ $(a\neq 1)$ байх $q\in \mathbb{Q}_{>0}$-тоо олдох бол

Энд a-нь эерэг рационал $\Rightarrow$ $a=\frac{a_1}{a_2}$-гэж ($a_1;a_2\in\mathbb{N}$ ба $\gcd(a_1;a_2)=1$).

Энд $a\neq 1 \Rightarrow a_1;a_2$-н ядаж 1-нь 1-ээс ялгаатай $\Rightarrow$

уг тоог x-гэвэл ~~хэрэв~~ $x\neq 1$ ба $x\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Хангалттай том $n\in\mathbb{N}$-н хувьд $x^{\frac{1}{2^n}}$-иррационал.

Энд $\gcd(a_1;a_2)=1$ - тул $a^{\frac{1}{2^n}}$ - иррационал.

Одоо $\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$: $a^{\frac{1}{2^n}}\in\mathbb{Q}_{>0}$ г/б.

n-ээр индукцээр.

Суурь: $a^{\frac{1}{2^0}}\in\mathbb{Q}_{>0}$ ба $f(q)=a^{\frac{1}{2^0}}$-байх $q\in\mathbb{Q}$-олдоно. (Тийм).

Таамаг: $a^{\frac{1}{2^k}}\in\mathbb{Q}_{>0}$ ба $f(h)=a^{\frac{1}{2^k}}$-байх $h\in\mathbb{Q}$-олдоно. бол. (k-тэй.

Шилжилт $a^{\frac{1}{2^{k+1}}}\in\mathbb{Q}_{>0}$ ба $f(s)=a^{\frac{1}{2^{k+1}}}$-байх $s\in\mathbb{Q}$-олдоно гэж баталъя.

P(? $a^{\frac{1}{2^k}}\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$. $P(a^{2k}; h) \Rightarrow f(a^{2^{k+1}}\cdot a^{1}$

$P(\frac{1}{a}; q) \Rightarrow P\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot f(q)^2\right) = f\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot f(q)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{a}\right)^2=a \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{a} \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}\in\mathbb{Q}$

$P\left(a^2;\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left((a^2)^2\cdot f\left(\frac{1}{a}\right)^2\right)=f(a^2)^2\cdot f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

$f(1)=f(a^2)^2\cdot a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(a^2)=a$

P('

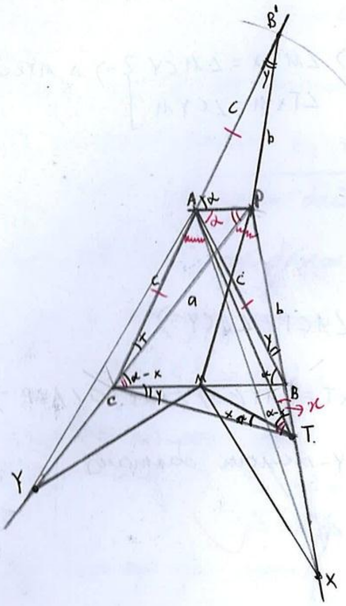
I — 3
II — 0
III — 7

$\sum$ 10

Б. Батмэнд   Цаас 1/3

1-р сорилго.

I – 7
II – 4
III – 0
Σ 11



$\left.\begin{array}{l}\angle PCA = x \\ \angle PB = y\end{array}\right\}$ - гэе. $\left.\begin{array}{l}AC = AT = c \\ PC = a \\ PB = b\end{array}\right\}$ - гэе. $(a>b)$.

$\angle ACB = \angle ABC = \alpha$ - гэе

$\triangle APC$-г багтаасан тойрог (PB)-г P-ээс ялгаатай T-цэгт огтолно гэе.

CA-шулуун дээр A-цэг нь $[B'C]$-дээр оршино ба $AB' = AC$-байх B'-цэг авъя.

Энд $\left.\begin{array}{l}AP \parallel BC \Rightarrow \cancel{\angle PAB}\ \angle B'AP = \angle B'CB = \alpha \\ AP \parallel BC \Rightarrow \angle PAB = \angle ABC = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle B'AP = \angle BAP \\ AB' = AC = AB \\ AP = AP\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle B'AP = \triangle BAP \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AB'P = \angle ABP = y$,
$PB' = PB = b$

~~Энд / A цэг тойрог дээр~~

Энд $\triangle CB'P$: $PC > PB' \Rightarrow \angle CB'P > B'CP \Rightarrow y > x$.

~~Энд $\angle PCA = \angle PTA = x \Rightarrow y$ / $\angle PTA < \angle PBA \Rightarrow B$-нь $[PT]$-дээр~~

~~Энд~~ Энд $\left.\begin{array}{l}\angle APT = 180^\circ - \angle PBC = 180^\circ - (\angle PBA + \angle ABC) = 180^\circ - \alpha - y \\ \angle ATP = \angle ACP = x\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAT = 180^\circ - \angle APT - \angle ATP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - y) - x = \alpha + y - x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PCT = \angle PAT = \alpha + y - x$

$\angle PCB = \angle ACB - \angle ACP = \alpha - x \Rightarrow \angle BCT = \angle PCT - \angle PCB = \alpha + y - x - (\alpha - x) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\angle BCT = y}$

Энд $\left.\begin{array}{l}\angle CAT = \angle CPT \Rightarrow \angle CAT = \angle BPC. \\ \angle ATC = \angle APC \text{ ба } AP \parallel BC \Rightarrow \angle APC = \angle PCB \Rightarrow \angle ATC = \angle PCB\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ATC \sim \triangle PCB \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \frac{CT}{AC} = \frac{PC}{BC} \Rightarrow \frac{CT}{c} = \frac{a}{2MC}$~~ $\Rightarrow \frac{CT}{AC} = \frac{BC}{PB} \Rightarrow \frac{CT}{c} = \frac{2MC}{b} \Rightarrow \frac{CT}{2c} = \frac{MC}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{b}{2c} = \frac{MC}{CT} \Rightarrow \frac{B'P}{B'C} = \frac{MC}{CT} \\ \angle CB'P = \angle TCM\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CB'P \sim \triangle TCM \Rightarrow \frac{CM}{MT} = \frac{B'P}{PC} = \frac{b}{a}$.

$\Downarrow \angle CTM = \angle B'CP = x$.

$\angle PTC = 180^\circ - \angle PAC = 180^\circ - (180^\circ - \angle ACB) = \angle ACB = \alpha$.

$\Rightarrow \angle PTM = \angle PTC - \angle MTC = \alpha - x$. $\Rightarrow \angle PCM = \angle PTM$.

Эдг $\triangle ATC \sim \triangle PCB \Rightarrow \dfrac{AT}{AC} = \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{a}{b}$.

Одоо $\angle MTX = 180^\circ - \angle PTM = 180^\circ - \angle PCM = \angle MCY \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle MTX = \angle MCY \\ \angle TXM = \angle CYM\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MTX \sim \triangle MCY \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{TX}{CY} = \dfrac{MT}{MC} = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{AT}{AC} = \dfrac{a}{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{TX}{CY} = \dfrac{AT}{AC}.$$

$\angle ACP = \angle ATP \Rightarrow \angle ATX = 180^\circ - \angle ATP = 180^\circ - \angle ACP = \angle ACY \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{TX}{CY} = \dfrac{AT}{AC} \\ \angle ATX = \angle ACY\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ATX \sim \triangle ACY \Rightarrow \angle AXT = \angle AYC \Rightarrow \angle AXP = \angle AYP \Rightarrow$$

$\Rightarrow APXY$-тойрогт багтана.