Шинэ Монгол 10² О. Ишцээл.

A1. Жишээ $f(x)=1$ гэж тогтмол функц нь шийд болно. Өөр функц боломжгүй гэдгийг баталъя.

Эсрэгээр f нь тогтмол биш $f(x^2\cdot f(y)^2)=f(x)^2\cdot f(y)$ (1) функц олддог гэе.

$f(1)=a$ гэе. (f нь $Q_{>0}\to Q_{>0}$ тул болно)

$x\to\frac{1}{f(1)}$; $y\to 1$ гэж орлуулбал $f\left(\frac{1}{f(1)^2}\cdot f(1)^2\right)=f\left(\frac{1}{f(1)}\right)^2\cdot f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=a=f\left(\frac{1}{a}\right)^2\cdot a\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)^2=1$ болно. f нь эерэг эерэг утга буцаах тул $f\left(\frac{1}{a}\right)=1$ болно. $\Longrightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=1$.

$y\to\frac{1}{a}$ гэж орлуулбал $f(y)=f\left(\frac{1}{a}\right)=1$ болох тул $f(x^2\cdot 1)=f(x)^2\cdot 1$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x^2)=f(x)^2$ болно. (2)

(2)-д $x\to 1$ гэж орлуулахад, $f(1)=f(1)=a=f(1)^2=a^2\Rightarrow a=1$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=1$ болно.

f нь тогтмол биш тул $f(x_0)=s\neq 1$ байх $s; x_0$ олдоно.

(1)-д $x\to 1$ гэхэд, $f(f(y)^2)\overset{(2)}{=}f(f(y))^2=f(1)^2\cdot f(y)=f(y)$ (3) болно.

(3)-г харъя.

~~Иймд $f\left(s^{\frac{1}{2^k}}\right)=s^{\frac{1}{2^{k+1}}}$ байна. ($\forall k\geq 0$-н хувьд).~~

~~Энэ нь (3)-с индукцээр гарна.~~

~~(3)-д $y\to x_0$ гэхэд $f(s)^2=s\Rightarrow f(s)=\sqrt{s}=s^{\frac{1}{2}}$ болно. (суурь болно)~~

~~Индукцлэвэл, k-н хувьд үнэн гэвэл k+1-н хувьд,~~

~~$f\left(s^{\frac{1}{2^k}}\right)=s^{\frac{1}{2^{k+1}}}\Rightarrow$ (3)-д $y\to s^{\frac{1}{2^k}}\Rightarrow f\left(s^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right)^2=s^{\frac{1}{2^{k+1}}}\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow f\left(s^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right)=s^{\frac{1}{2^{k+2}}}$ болно.~~

~~s нь $s\in Q_{>0}$ байх ёстой тул $s=\frac{a}{b}$ гэж болно. Тэгвэл $\forall k$ $s^{\frac{1}{2^k}}$ нь мэдэгдэх~~

Энд $s\neq 1$ ба $s\in Q_{>0}$ тул $s^{\frac{1}{2^k}}$ тоог харахад $\exists k: s^{\frac{1}{2^k}}\notin Q_{>0}$ байна. (s нь 1 биш учир) Ийм байх хамгийн бага k-г k_0 гэе (Энд $k\in Z_{>0}$ тоонуудаас хайна.)

(3)-д $y\to x_0$ гэхэд $f(s)^2=s\Rightarrow f(s)=\sqrt{s}=s^{\frac{1}{2}}$ болно. $s^{\frac{1}{2}}$ нь f-н утгын мужид байх тул $s^{\frac{1}{2}}\in Q_{>0}$ болно. $\Rightarrow s^{\frac{1}{2}}$-г f-д орлуулж болно.

$\Rightarrow y\to s$ гэхэд $f\left(s^{\frac{1}{2}}\right)^2=s^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f\left(s^{\frac{1}{2}}\right)=s^{\frac{1}{2^2}}$ болно. $\Rightarrow s^{\frac{1}{2^2}}\in Q_{>0}$ болно. $\Rightarrow$

(ард шилжилээ)

$y \to 5^{2^{-2}} \Rightarrow f(5^{2^{-2}})^2 = 5^{2^{-2}} \Rightarrow f(5^{2^{-3}}) = 5^{2^{-3}} = 5^{2^{-3}}$ болно. $\Rightarrow 5^{2^{-3}} \in \mathbb{Q}_{>0}$ болно.

Энэ байдлаар $y \to 5^{2^{-(k_0-1)}}$ гэвэл $f(5^{2^{-(k_0-1)}})^2 = 5^{2^{-(k_0-1)}} \Rightarrow f(5^{2^{-(k_0-1)}}) = 5^{2^{-k_0}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{2^{-k_0}} \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow$ зөрчил болно. Иймд (f) тогтмол биш, (1)-г хангах f олдохгүй

$\Rightarrow$ f нь тогтмол функц л олдоно.

$f(x) = c$ гэвэл $c = c^2 \cdot c \Rightarrow c = 1$ болох тул тогтмол ганц функц нь $f(x)=1$

$\Rightarrow$ $f(x)=1$-г болно гэдэг нь илэрхий. $\Rightarrow$ Хариу: $f(x)=1$ болно.

A2. $(i;j)$ нүдэнд b_{ij} тоо байгаа гэе.

$b_{ij} \equiv 1\,(n)$ тул $b_{ij} = a_{ij} \cdot n + 1$ гэе. Мөрийн Σ-н хувьд $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \cdot n + n \equiv$

$\equiv n\,(n^2) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \equiv 0\,(n)$ болно. Баганы хувьд мөн адил $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \equiv 0\,(n)$ болно.

$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$; $c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ гэе.

$$R_i = \prod_{j=1}^{n} b_{ij} = \prod_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot n + 1) \equiv 1 + n \cdot \sum_j a_{ij} + n^2 \cdot \sum_{j<k} a_{ij} \cdot a_{ik} + n^3 \cdot \sum_{j<k<l} a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot a_{il}\ (n^4)$$

болно.

$$\sum_{j<k} a_{ij} \cdot a_{ik} = \frac{(\sum a_{ij})^2 - (\sum a_{ij}^2)}{2} = \frac{\tau_i^2 - (\sum_j a_{ij}^2)}{2}$$ болно. $\sum_j a_{ij}^2 = \tau_i''$ гэе.

$\sum_j a_{ij}^3 = \tau_i'''$ гэе.

Мэдээж $\sum_i \tau_i = \sum_j c_j$ байна. (бүх a_{ij}-н Σ учир).(1)

$\sum_i \tau_i'' = \sum_j c_j''$ байна. (бүх a_{ij}^2-н Σ учир).(2) (τ_i'''-н хувьд мөн адил) $\sum_i \tau_i''' = \sum_j c_j'''$ байна.(3)

$$\sum_{j<k<l} a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot a_{il} = \frac{\sum_{j<k} a_{ij} \cdot a_{ik} (\tau_i - a_{ij} - a_{ik})}{3} = \frac{\tau_i \sum_{j<k} a_{ij} a_{ik} - \sum_{j<k} a_{ij} \cdot a_{ik} (a_{ij} + a_{ik})}{3} =$$

$$= \frac{\tau_i \cdot \frac{\tau_i^2 - \tau_i''}{2} - \sum_j a_{ij}^2 (\tau_i - a_{ij})}{3} = \frac{\frac{\tau_i^2 - \tau_i''}{2} \cdot \tau_i - \sum_j a_{ij}^2 \tau_i + \tau_i'''}{3} =$$

$$= \frac{\frac{\tau_i^3}{2} - \frac{\tau_i \cdot \tau_i''}{2} - \tau_i'' \cdot \tau_i + \tau_i'''}{3} = \frac{\frac{\tau_i^3}{2} - \frac{3\tau_i \cdot \tau_i''}{2} + \tau_i'''}{3} = \frac{\tau_i^3}{6} - \frac{\tau_i \cdot \tau_i''}{2} + \frac{\tau_i'''}{3}$$ болно.

Эндээс

$$\sum R_i \equiv \sum_i \left(1 + n \cdot \sum_j a_{ij} + n^2 \sum_{j<k} a_{ij} \cdot a_{ik} + n^3 \cdot \sum_{j<k<l} a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot a_{il}\right) \equiv$$

$$\equiv \sum_i \left(1 + n \cdot \tau_i + n^2 \cdot \frac{\tau_i^2 - \tau_i''}{2} + n^3 \cdot \left(\frac{\tau_i^3}{6} - \frac{\tau_i \cdot \tau_i''}{2} + \frac{\tau_i'''}{3}\right)\right) =$$

$$= n + n \cdot \sum_i \tau_i + n^2 \cdot \frac{\sum \tau_i^2}{2} - \frac{n^2}{2} \sum \tau_i'' + n^3 \cdot \frac{\sum \tau_i^3}{6} - n^3 \sum \frac{\tau_i \tau_i''}{2} + n^3 \cdot \sum \frac{\tau_i'''}{3}\ (n^4)$$ болно.

$\sum C_j$-г мөн адил олоод тэнцүүлбэл,

(цаашаагийн цаасанд үргэлжилнэ)

$\sum R_i \equiv \sum C_j (n^4) \Leftrightarrow \; n + n\cdot\sum_i r_i + n^2\cdot\frac{\sum r_i^2}{2} - \frac{n^2\sum r_i''}{2} + n^3\frac{\sum r_i^3}{6} - n^3\sum\frac{r_i\cdot r_i''}{2} + n^3\cdot\sum\frac{r_i'''}{3} \equiv$

$n + n\cdot\sum_j c_j + n^2\cdot\frac{\sum c_j^2}{2} - \frac{n^2\sum c_j''}{2} + n^3\frac{\sum c_j^3}{6} - n^3\sum\frac{c_j\cdot c_j''}{2} + n^3\cdot\frac{\sum c_j'''}{3}$ болно.

(1); (2); (3)-с

$\sum R_i \equiv \sum C_j (n^4) \Leftrightarrow \; n^2\cdot\frac{\sum r_i^2}{2} + n^3\cdot\frac{\sum r_i^3}{6} - n^3\frac{\sum r_i\cdot r_i''}{2} \equiv n^2\cdot\frac{\sum c_j^2}{2} + n^3\cdot\frac{\sum c_j^3}{6} - n^3\frac{\sum c_j\cdot c_j''}{2}$

$(\mathrm{mod}\, n^4)$ болно. (4)

Үүнийг батлахын тулд (буюу (4)-г)
i) $n^2\cdot\frac{\sum r_i^2}{2} \equiv n^2\cdot\frac{\sum c_j^2}{2} \; (n^4)$
ii) $n^3\cdot\frac{\sum r_i^3}{6} \equiv n^3\cdot\frac{\sum c_j^3}{6} \; (n^4)$
iii) $n^3\cdot\frac{\sum r_i\cdot r_i''}{2} \equiv n^3\cdot\frac{\sum c_j\cdot c_j''}{2} \; (n^4)$ гэж бүгдийг батлая.

i) $n^2\cdot\frac{\sum r_i^2}{2} \equiv n^2\cdot\frac{\sum c_j^2}{2} \; (n^4) \Leftrightarrow \; \frac{\sum r_i^2}{2} \equiv \frac{\sum c_j^2}{2} \; (n^2)$ болно.

Энд баганын 2-р нөхцлөөс $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r_i \equiv 0(n)$; $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = c_j \equiv 0(n)$ тул

$r_i = n\cdot r_i'$; $c_j = n\cdot c_j'$ гэе. Тэгвэл $\sum_i r_i' = \sum_j c_j'$ байна.

$\frac{\sum r_i^2}{2} \equiv \frac{\sum c_j^2}{2} \; (n^2) \Leftrightarrow \; \frac{n^2\sum r_i'^2}{2} \equiv \frac{n^2\sum c_j'^2}{2} \; (n^2)$ болно.

n сондгой бол $n^2\cdot\sum r_i'^2 \equiv 0 \equiv n^2\cdot\sum c_j'^2 \; (n^2) \Rightarrow \frac{n^2\cdot\sum r_i'^2}{2} \equiv \frac{n^2\sum c_j'^2}{2} \; (n^2) \Rightarrow \blacktriangle$

n тэгш бол, $\sum r_i'^2 \equiv \sum c_j'^2 \; (2)$-г батлахад болно.

~~[illegible]~~ $r_i' \equiv r_i'^2 \; (2)$; $c_j' \equiv c_j'^2 \; (2)$ тул $\sum_i r_i' \equiv \sum_i r_i'^2 \equiv \sum c_j'^2 \equiv \sum c_j' \; (2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \blacktriangle$.

ii) $n^3\cdot\frac{\sum r_i^3}{6} \equiv n^3\cdot\frac{\sum c_j^3}{6} \; (n^4) \Leftrightarrow \; \frac{\sum r_i^3}{6} \equiv \frac{\sum c_j^3}{6} \; (n)$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \; n\cdot\frac{n^2}{6}\cdot\sum r_i'^3 \equiv n\cdot\frac{n^2}{6}\cdot\sum c_j'^3 \; (n)$ болно.

$n \not\vdots 2$; $n \not\vdots 3$ үед $\; n\cdot\frac{n^2}{6}\cdot\sum r_i'^3 \equiv 0 \equiv n\cdot\frac{n^2}{6}\cdot\sum c_j'^3 \; (n) \Rightarrow \blacktriangle$.

$n \vdots 2$; $n \not\vdots 3$ үед $\; n\cdot\underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{бүхэл}}\cdot\left(\frac{n}{3}\cdot\sum r_i'^3\right) \equiv 0 \equiv n\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{3}\cdot\sum c_j'^3\right) \; (n) \Rightarrow \blacktriangle$

$n \not\vdots 2$; $n \vdots 3$ үед ноч адил (2; 3-н байрыг сольсонтойгоо) $\blacktriangle$

$n \vdots 2$; $n \vdots 3$ үед $\; n^2\cdot\underbrace{\frac{n}{6}}_{\text{бүхэл}}\cdot\sum r_i'^3 \equiv 0 \equiv n^2\cdot\frac{n}{6}\sum c_j'^3 \; (n) \Rightarrow \blacktriangle$ Иймд $\blacktriangle$

iii) $n^3\cdot\frac{\sum r_i\cdot r_i''}{2} \equiv n^3\frac{\sum c_j\cdot c_j''}{2} \; (n^4) \Leftrightarrow \; \frac{\sum r_i\cdot r_i''}{2} \equiv \frac{\sum c_j\cdot c_j''}{2} \; (n)$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow n\cdot\frac{\sum r_i'\cdot r_i''}{2} \equiv n\cdot\frac{\sum c_j'\cdot c_j''}{2} \; (n)$ болно. n сондгой бол,

$n\cdot\frac{\sum r_i'\cdot r_i''}{2} \equiv 0 \equiv n\cdot\frac{\sum c_j'\cdot c_j''}{2} \; (n) \Rightarrow \blacktriangle$

n тэгш бол,

$n \cdot \frac{\sum r_i' r_i''}{2} \equiv n \cdot \frac{\sum c_j' \cdot c_j''}{2} (n) \Leftrightarrow \sum r_i' \cdot r_i'' \equiv \sum c_j' \cdot c_j'' (2)$ болно.

$r_i'' = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots \equiv a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = r_i (2)$ болно. $r_i \vdots n$ тул $r_i'' \equiv r_i \equiv 0 (2)$ болно. c нь мөн адил $c_j'' \equiv c_j \equiv 0 (2)$ болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum r_i' \cdot r_i'' \equiv 0 \equiv \sum c_j' \cdot c_j'' (2)$ болно. ▲.

(4)-ийн компонент бүр тэнцүү тул (4) биелнэ. $\Rightarrow \sum R_i \equiv \sum C_j (n^4)$ болно. ▲

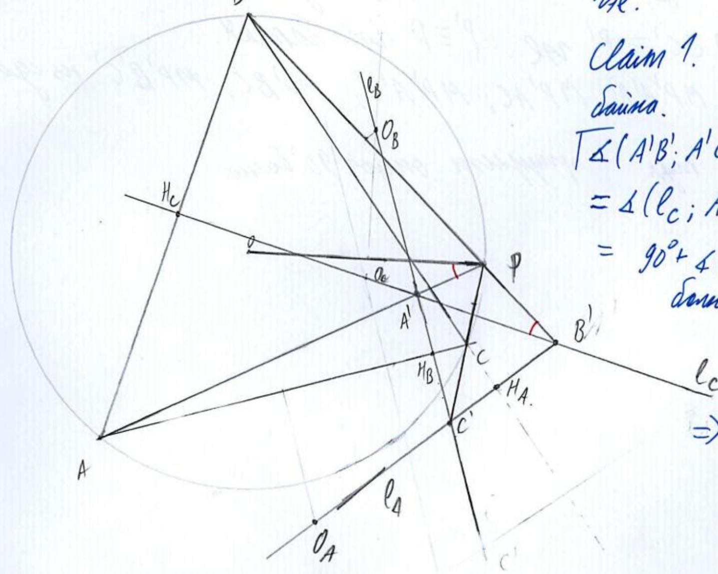
I – 7

II – 7

III – 5

Нийт 19

A3.



$- l_A \cap l_B = C'$; $l_B \cap l_C = A'$; $l_C \cap l_A = B'$ гэе.

Claim 1. (~~[illegible]~~) $A'B'C' \sim ABC$ байна.

$\ulcorner \measuredangle(A'B'; A'C') = \measuredangle(l_C; l_B) =$
$= \measuredangle(l_C; AB) + \measuredangle(AB; AC) + \measuredangle(AC; l_B) =$
$= 90^\circ + \measuredangle(AB; AC) + 90^\circ = \measuredangle(AB; AC)$ болно. Яг адилаар
$\measuredangle(B'A'; B'C') = \measuredangle(BA; BC)$;
$\measuredangle(C'A'; C'B') = \measuredangle(CA; CB)$ болно.
$\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim ABC$ болно. $\blacktriangle \lrcorner$

Claim 2. $AA' \ni P$; $BB' \ni P$; ~~[illegible]~~ $CC' \ni P$ болно.
Баталгааг дараа нь бичье.

Claim 3. $H_A; H_B; H_C$ - г $l_A; l_B; l_C$ -н $AB; BC; CA$-тай огтлолцох цэгүүд гэвэл, $H_A; H_B; H_C$ коллинеар.

$\ulcorner \measuredangle(H_C H_B A') = \measuredangle(H_C A A') = \measuredangle(BAP) = \measuredangle(BCP) = \measuredangle(H_A C C') = \measuredangle(H_A H_B C')$ болно $\Rightarrow$
($A'H_C \perp AB$; $A'H_B \perp AC \Rightarrow AH_C A' H_B$ cyclic. Мөн адилаар $BH_C H_A B'$; $CH_A C' H_B$ cyclic)
$\Rightarrow \measuredangle(H_C H_B; l_B) = \measuredangle(H_A H_B; l_B) \Rightarrow H_A; H_B; H_C$ colinear. $\blacktriangle \lrcorner$.

Claim 4. $P \in (A'B'C')$

$\ulcorner \measuredangle(A'C'P) = \measuredangle(H_B C' C) = \measuredangle(H_B H_A C) = \measuredangle(H_C H_A B) = \measuredangle(H_C B' B) = \measuredangle(A'B'P) \Rightarrow$
$\Rightarrow A'B'C'P$ cyclic $\blacktriangle \lrcorner$

Claim 5. $\measuredangle(OPA) = \measuredangle(PB'A')$.

$\ulcorner \measuredangle(OPA) = 90^\circ - \measuredangle(ABP) = 90^\circ - \measuredangle(H_C B B') =$ ~~[illegible]~~ $\measuredangle(BB'H_C) = \measuredangle(PB'A')$ болно
$\blacktriangle \lrcorner$

~~[illegible]~~ .

Claim 5-с OP нь $(A'B'C')$-н $\overbrace{\text{шүргэгч}}^{\text{P цэг дээрх}}$ болно.

Одоо Claim 2-г баталъя.

Claim 1-с $A'B'C' \sim ABC$ тул энэ 2 △-ны спирал симметрийн төв оршино. M гэе. ~~[illegible]~~ $A'B'C' \sim ABC$ тул AA'; BB'; CC' нь 1 цэгт огтлолцоно. $AA' \cap BB' \cap CC' = P'$ гэе. $P' \equiv P$ гэж батлая.

~~[illegible]~~ Энд $MP'AB$; $MP'A'B'$; $MP'AC$; $MP'A'C'$; $MP'BC$; $MP'B'C'$ нь cyclic байна. $B'C' = \ell_A \perp BC$ тул эргүүлэх өнцөг $90°$ байна.

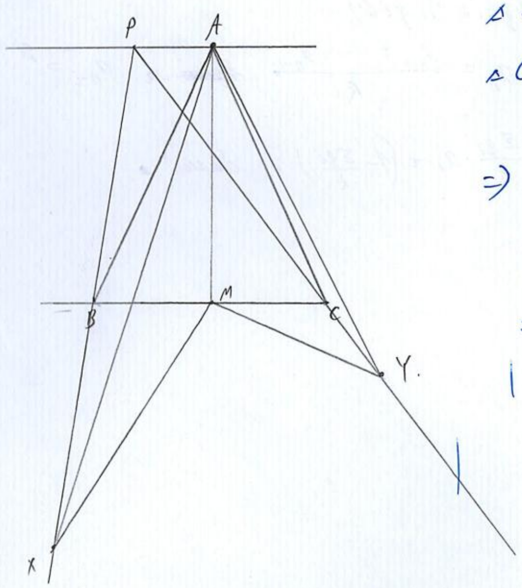
?

I —
II —
III — 5

Σ

О.Мишээл

B1.



$\triangle BXM$-н: $\dfrac{BM}{\sin\angle BXM} = \dfrac{XM}{\sin\angle XBM} = \dfrac{XM}{\sin\angle PBC}$ $\Rightarrow$

$\triangle CYM$-н: $\dfrac{CM}{\sin\angle CYM} = \dfrac{YM}{\sin\angle YCM} = \dfrac{YM}{\sin\angle PCB}$

$\Rightarrow$ $BM = CM$; $\angle BXM = \angle CYM$ тул

$\dfrac{XM}{\sin\angle PBC} = \dfrac{BM}{\sin\angle BXM} = \dfrac{CM}{\sin\angle CYM} = \dfrac{YM}{\sin\angle PCB} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dfrac{XM}{YM} = \dfrac{\sin PBC}{\sin PCB} = \dfrac{PC}{PB}$ байна.

$\dfrac{XM}{YM} = \dfrac{PC}{PB}$.

B2. i-р багийн ирэх өдөр M_i; ~~явах~~ нь m_i гэе.
Тэгвэл $\max m_i \geq \min M_i$ байна.
Учир нь $\max m_i = m_j$; $\min M_i = M_k$ гэвэл, Эсрэгээс $m_j < M_k$ бол, j-р баг M_j-с m_j-р өдөр байх, i-р баг M_k-с ирэх тул j, k баг тоглож чадахгүй. $\Rightarrow$ $m_j \geq M_k$ байна.

83. Хариу: $\frac{a_1 - a_0}{2018} = \frac{1}{2018}$

Энд $\forall a_n = q a_1 + (1-q)a_0$ гэж хэлбэрт бичигдэнэ. $(q \in (0,1);\ q \in \mathbb{Q})$

$a_1 = 1 \cdot a_1$; $a_0 = 1 \cdot a_0$ ба индукцлавал, $a_n = \frac{a_{n-1} + \dots + a_{n-k}}{k}$ ба $a_{n-i} = q_i \cdot a_1 + (1-q_i) a_0$

гэвэл, $a_n = \frac{(\Sigma q_i) \cdot a_1 + (k - \Sigma q_i) \cdot a_0}{k} = \frac{\Sigma q_i}{k} \cdot a_1 + \left(1 - \frac{\Sigma q_i}{k}\right) a_0$ болно. ▲

I — 0
II — 0
III — 0

Σ 0