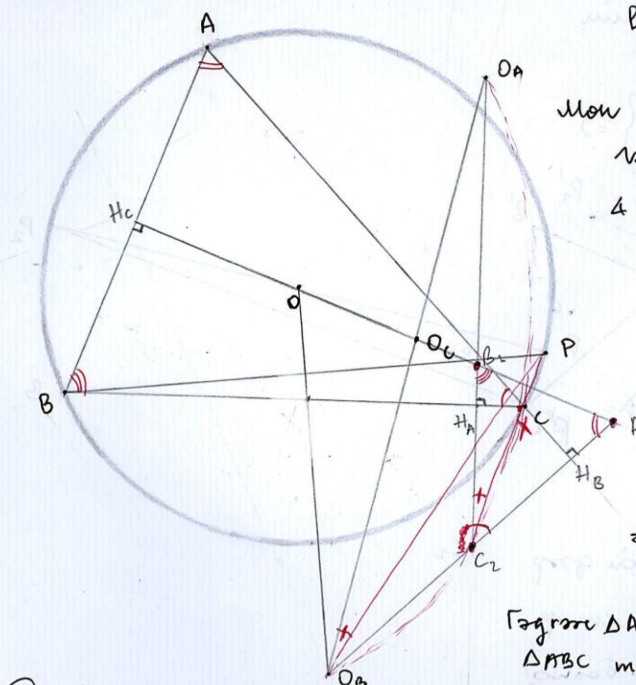
Олонлог сургууль
Б. Долгормаа.

Бодлого А3.



$\ell_A \cap BC = H_A$, $\ell_B \cap CA = H_B$, $\ell_C \cap AB = H_c$ гэе.

Мөн $\ell_A \cap \ell_B = C_2$ $\ell_A \cap \ell_C = B_2$ $\ell_B \cap \ell_C = A_2$ гэе.

$\angle C_2H_AC = 90°$, $\angle C_2H_BC = 90°$ =>
=> $CH_BC_2H_A$ - багтсан =>
$\angle H_AC_2H_B = \angle ACB = \gamma$.

$\angle AH_CA_2 = \angle AH_BA_2 = 90° \Rightarrow AH_CH_BA_2$ нь багтсан $\Rightarrow \angle H_CA_2C_2 = \angle H_CAH_B = \alpha$.

$\angle BH_CB_2 = 90°$, $\angle BH_AB_2 = 90°$ =>
=> $H_CBH_AB_2$ нь багтсан =>
$\angle H_AB_2A_2 = \angle H_CBH_A = \beta$.

Гэдгээс $\triangle A_2B_2C_2$ нь α, β, γ өнцөгтэй буюу $\triangle ABC$ тэй төсөөтэй $\triangle$ болно.

① P, C, C_2 нь нэг шулуун болохыг батлая. ~~$\angle$~~(P, C, C_2), (P, A, A_2) ~~...~~ (P, B, B_2) ...

... ← нь нэг шулуун байх бөгөөд ...

тул ~~...~~ Нэгийг нь батлахад нөгөө 2 нь адилхан тул P, C, C_2 нэг шулуун гэдгийг батлая.

(i) $O_APC_2O_B$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт.

Баталгаа: $\angle O_AC_2O_B = \angle C_2B_2A_2 + \angle C_2A_2B_2 = \alpha + \beta$ тул $\angle O_APO_B$-г $\alpha + \beta$ болохыг батлая.

O_A нь $\triangle AOP$-г багтаасан тойргийн төв => $O_AO = O_AP = O_AA$.

$OA = OP$, $O_AA = O_AP$, OO_A нь ерөнхий => $\triangle AOO_A = \triangle POO_A$ => $\angle AOO_A = \angle O_AOP$ =>

=> $\angle O_AOP = \frac{\angle AOP}{2} = \frac{\breve{AP}}{2}$, $O_AP = O_AO$ => $\angle O_APO = \angle O_AOP = \frac{\breve{AP}}{2}$.

Мөн адилаар $\angle OPO_B = \angle POO_B = \frac{\angle BOP}{2} = \frac{\breve{BP}}{2}$ болно.

=> $\angle O_APO_B = \angle O_APO + \angle OPO_B = \frac{\breve{AP}}{2} + \frac{\breve{BP}}{2} = \frac{\breve{AC}}{2} + \frac{\breve{CB}}{2} = \beta + \alpha$ болж батлагдана.

(1) - ээс $\angle O_AO_BP = \angle O_AC_2P = 90° - \angle OPO_B = 90° - \frac{\breve{BP}}{2}$ $\left(\begin{matrix} OO_A = O_AP \\ OO_B = O_BP \end{matrix} \Rightarrow OP \perp O_AO_B\right)$.

$C_2P \cap BC = X$ гэе. $\angle O_AC_2P = \angle O_AC_2X = \angle H_AC_2X = 90° - \frac{\breve{BP}}{2}$ => $\angle C_2H_AX = 90°$

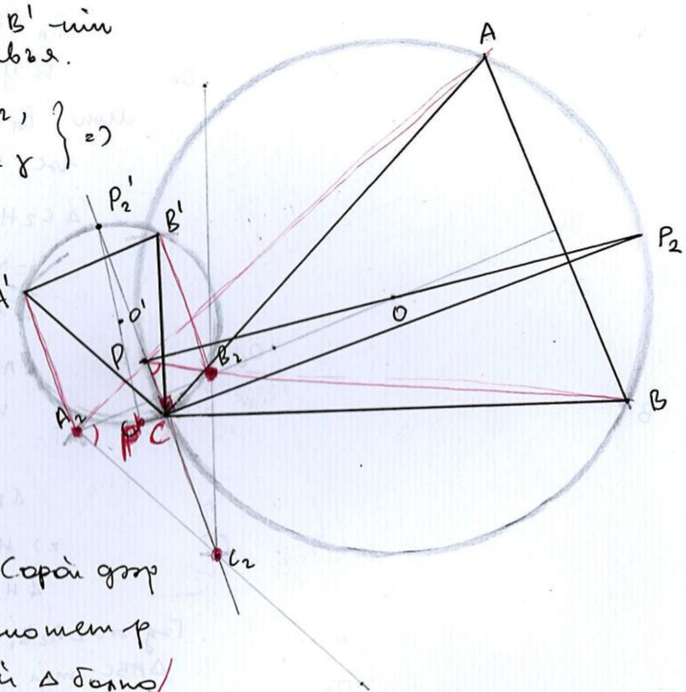
тул $\angle H_AXC_2 = 180° - 90° - (90° - \frac{\breve{BP}}{2}) = \frac{\breve{BP}}{2}$ болно. => $\angle BXP = 180° - \angle BXC_2 =$
$= 180° - \angle H_AXC_2 = 180° - \frac{\breve{BP}}{2}$.

$ABCP$ багтсан => $\left.\begin{matrix} \angle BCP = \frac{\breve{BAP}}{2} = 180° - \frac{\breve{BP}}{2} \\ \angle BXP = 180° - \frac{\breve{BP}}{2} \\ C, X \in BC \end{matrix}\right\}$ => $C \equiv X$ болно. => C_2, X, P буюу C_2, C, P нэг шулуун.

CC_2A_2A' нь #
CC_2B_2B' нь # байх A', B'-ийг авья.

$A'C = A_2C_2$, $B'C = B_2C_2$,
$\angle B'CA' = \angle B_2C_2P + \angle PC_2A_2 = \gamma$ } =>

=> $\triangle B'CA' = \triangle B_2C_2A_2$.



$B'C \parallel B_2C_2$
$B_2C_2 \perp BC$ } =>
=> $B'C \perp CB$.
$A'C \parallel A_2C_2$
$A_2C_2 \perp AC$ } =>
=> $A'C \perp AC$. } =>

=> $\triangle A'B'C$ нь $\triangle ABC$-г С орой дээр $90°$-аар эргүүлээд гомотет хийжигсэнтэй төсөөтэй Δ болно.

PO, $\omega(\Delta ABC)$-ийн огтлолцол-г P_2 гэе. $P_2 \notin \{A, B, C\}$ бодлогын нөхцөлөөр. P, P_2 нь диаметр => $\angle PCP_2 = 90°$. => $\omega(\Delta A'B'C)$ дээр P_2' гэсэн P_2-ийн гомотет дүрийг авбал $\angle P_2'CP_2 = 90°$ =>
=> $P_2' \in PC$. $\omega(\Delta A'B'C)$-ийн төвийг O' гэе. $P_2'O' \cap \omega(\Delta A'B'C)$-г P' гэвэл P' нь P-ийн гомотет хувиргалтын дүр => $\angle P_2'P'C =$
$= \angle P^2PC$ => $P_2'C \cap PP_2 = H$ гэвэл $HPCP'$ нь багтсан => $\angle PHP_2' =$
$= 180° - \angle PCP' = 90°$ => $P_2'P \perp P_2P$. Будаг $OP \perp P'O'$

(1)-д батлагдсанаар A, A_2, P нэг шулуун, B, B_2, P нэг шулуун =>
=> $\angle B_2PC_2 = \angle BPC = \frac{\smile CB}{2} = \alpha$, $\angle B_2A_2C_2 = \alpha$ => P, B_2, C_2, A_2 нь нэг тойрог ~~байх~~ дээр оршино.

P_2', P, C, C_2 нь (1)-д батлагдсанаар нэг шулуун, ~~C_2-ийн~~ $\omega(A_2C_2B_2P)$ дээр C_2-ийн дүр $\omega(A'CB'P_2')$ дээр C => P_2'-ийн дүр P байна.

Мөн $\omega(A_2C_2B_2P)$-ийн ~~тойргийн~~ төвийг O_2 гэвэл $O'O_2 \parallel CC_2$, $O'P_2' = O_2P$ => $O'P_2'PO_2$ нь # => $O'P_2' \parallel O_2P$, $O'P' \parallel O_2P$ =>
=> $O'P' \perp OP$ тул $O_2P \perp OP$ болно => OP нь $\omega(\Delta A_2B_2C_2)$-ийн P цэгт шүргэх нь батлагдана.

Бодлого A1. Б. Долгормаа.

Бодлогын өгөгдөл болох $f(x^2f(y)^2)=f(x)^2f(y)$ -ийн (*)-оор тэмдэглэе.

~~(*)-д $x=1$ -ийн орлуулбал~~

$$\cancel{f(f(y)^2)}$$

(*)-д $x=\frac{1}{f(y)}$, $\forall y\in\mathbb{Q}_{>0}$ -ийн орлуулбал:

$$f(1)=f\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(y) \qquad (1)$$

(1)-д $y=1$ -ийн орлуулбал:

$$f(1)=f\left(\frac{1}{f(1)}\right)^2 f(1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(1)}\right)^2=1 \qquad f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{f(1)}\right)=1$ болно.

(1)-д $y=\frac{1}{f(1)}$ -ийн орлуулбал:

$$f(1)=f\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{f(1)}\right)}\right)^2 f\left(\frac{1}{f(1)}\right) \Rightarrow f(1)=f(1)^2\cdot 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(1)=1$.

(*)-д $x=1$ $y=k$ $\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$ -г орлуулбал:
$f(f(k)^2)=f(1)^2f(k)=f(k)$

(*)-д $y=1$ $x=f(k)$ $\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$ үед:
$f(f(k)^2)=f(f(k))^2$

$\Rightarrow f(k)=f(f(k))^2$, (2) $\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$ болно. $\Rightarrow$

~~$\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$~~ $\Rightarrow$ $f(k)=\underbrace{f(f(\ldots f(k)\ldots)}_{n}{}^{2^{n-1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ болно.

Индукцээр суурь үнэн, $f(k)=\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{n-1}{}^{2^{n-2}}$ үнэн гэвэл

(2)-д $k=\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{n-2}$ үед $\underbrace{f(f(\ldots f(k)\ldots)}_{n-1}=\underbrace{f(f(\ldots(k)\ldots)}_{n}{}^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(k)=\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{n-1}{}^{2^{n-2}}=\left(\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{n}{}^2\right)^{2^{n-2}}=\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{n}{}^{2^{n-1}}$ нь батлагдана.

$\Rightarrow$ $\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$ хувьд $f(k)\in\mathbb{Q}_{>0}$ тул $\sqrt[2^m]{f(k)}$ нь иррационал байх m олдоно. тэр m-ийн хувьд: ($f(k)\neq 1$ байх $k\in\mathbb{Q}_{>0}$ олдсон)

$f(k)=\underbrace{f(f\ldots f(k)\ldots)}_{m+1}{}^{2^m}$ буюу $\sqrt[2^m]{f(k)}=\underbrace{f(f(\ldots f(k)\ldots)}_{m+1}\in\mathbb{Q}_{>0}$

болж зөрчилд хүрнэ. $\Rightarrow$ Харин $f(k)=1$, $\forall k\in\mathbb{Q}_{>0}$.

Бодлого A2.

1-р нөхцөлөөс i-р мөр j-р баганы тоо нь

$$n\cdot x_{i,j}+1$$ гэж хэлж гадна.

2-р нөхцөлөөс

$i\in\overline{1,n}$ хувьд $x_{i,1}+x_{i,2}+\ldots+x_{i,n}\ \vdots\ n$

$j\in\overline{1,n}$ хувьд $x_{1,j}+x_{2,j}+\ldots+x_{n,j}\ \vdots\ n$ гэж хэлж гадна

$$R_i=(n\cdot x_{i,1}+1)\cdot(n\cdot x_{i,2}+1)\cdot\ldots\cdot(n\cdot x_{i,n}+1)=$$

$$=1+n\cdot\sum_{a=1}^{n}x_{i,a}+n^2\cdot\sum_{\substack{a=\overline{1,n}\ b=\overline{1,n}\\ a\neq b}}x_{i,a}\cdot x_{i,b}+n^3\cdot\sum_{\substack{a=\overline{1,n}\ b=\overline{1,n}\ c=\overline{1,n}\\ a\neq b\neq c}}x_{i,a}\cdot x_{i,b}\cdot x_{i,c}+S_1\cdot n^4$$

$$C_j=(n\cdot x_{1,j}+1)\cdot(n\cdot x_{2,j}+1)\cdot\ldots\cdot(n\cdot x_{n,j}+1)=$$

$$=1+n\cdot\sum_{a=1}^{n}x_{a,j}+n^2\cdot\sum_{\substack{a=\overline{1,n}\ b=\overline{1,n}\\ a\neq b}}x_{a,j}\cdot x_{b,j}+n^3\cdot\sum_{\substack{a=\overline{1,n}\ b=\overline{1,n}\ c=\overline{1,n}\\ a\neq b\neq c}}x_{a,j}\cdot x_{b,j}\cdot x_{c,j}+S_2\cdot n^4$$

R_i-үгдийн тийлбэр дэх 1 үүд-ийн $\Sigma=n$ $=$ C_i-үгдийн тийлбэр дэх 1-ийн Σ.

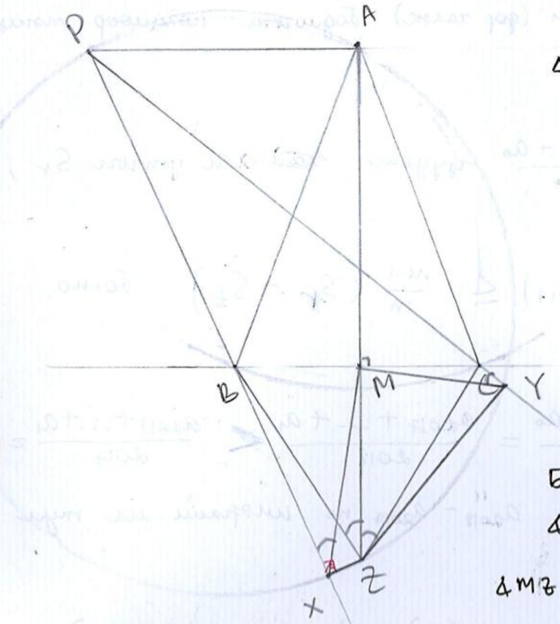
R_i-үгдийн тийлбэр дэх $n\cdot x_{i,a}$-үүд $\Sigma=n\cdot$ бүх $x_{i,j}$ үүд $=$ C_i-үгдийн тийлбэр дэх $n\cdot x_{a,j}$-үүд

I – 7
II – 1
III – 7

Σ 15

Бодлого B1.

Б. Долгормаа



I-7
II-0
III-2
Σ9

$\triangle BMX$ -ийн багтаасан тойргийн AM-г огтлох цэгийг Z гэе.

$AB = AC$, $BM = MC \Rightarrow AM \perp BC$.

$\Rightarrow \triangle BZC$ нь мөн адил хажуут болно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BZM = \angle MZC$. (1)

BMZX нь багтсан $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BXM = \angle BZM$ (2)

Бодлогын нөхцөл-р

$\angle BXM = \angle MYC$ (3)

$\angle MZC \overset{(1)}{=} \angle BZM \overset{(2)}{=} \angle BXM \overset{(3)}{=} \angle MYC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MZC = \angle MYC \Rightarrow$ MZYC нь багтсан.

~~∠MM~~ $\angle BMZ = 90^\circ$, BMZX нь багтсан $\Rightarrow \angle BXZ = 90^\circ$.

$\angle CMZ = 90^\circ$, MCYZ нь багтсан $\Rightarrow$ ~~MCYZ~~ $\angle CYZ$ нь 90°. } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PXZ = \angle BXZ = 90^\circ$, $\angle PYZ = \angle CYZ = 90^\circ \Rightarrow$ PXZY нь багтсан.

Мөн $PA \parallel BC \Rightarrow \angle PAZ = \angle BMZ = 90^\circ = \angle PYZ \Rightarrow$ PAYZ нь багтсан.

$\Rightarrow$ P, A, Y, Z, X нь бүгд нэг тойрог дээр орших бөгөөд P, A, Y, X нь нэг тойрог дээр орших нь батлагдана.

Бодлого B3.

$a_{2018} - a_{2017}$ нь хамгийн их утгаа авдаг a_{2018} нь:

$$a_{2018} = \frac{a_{2017} + a_{2016} + \dots + a_{2018-m}}{m}$$ байг.

$$a_{2018} - a_{2017} = \frac{\cancel{a_{2017}}(a_{2016} + \dots + a_{2018-m}) - (m-1)\cdot a_{2017}}{m}$$

$\frac{a_{2016} + \dots + a_{2018-m}}{m-1} = S_{m-1}$ гэж тэмдэглэвэл:

$$a_{2018} - a_{2017} = \frac{S_{m-1}\cdot(m-1) - (m-1)\cdot a_{2017}}{m} = \frac{(m-1)}{m}\cdot(S_{m-1} - a_{2017})$$ болно.

a_{2017} нь мөн $\frac{a_{2016}}{1}$, $\frac{a_{2016}+a_{2015}}{2}$, $\frac{a_{2016}+a_{2015}+a_{2014}}{3}$, ..., $\frac{a_{2016}+\dots+a_{0}}{2017}$

~~илэрхийллүүдийн~~ -үүдийн ногтэй (дор хаяж) бодлогын нөхцлөөр тэнцүү байх тул

$\frac{a_{2016}}{1}$, $\frac{a_{2016}+a_{2015}}{2}$, ..., $\frac{a_{2016}+\dots+a_{0}}{2017}$ үүдийн их утгыг S_r,

нб утгыг S_t гэвэл

$a_{2018}-a_{2017} = \frac{m-1}{m}\cdot(S_{m-1}-a_{2017}) \le \frac{m-1}{m}(S_r-S_t)$ болно.

~~Мөн $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\dots<$~~

(*) $a'_{2018} = \frac{a_{2017}+\dots+a_1+a_0}{2018} = \frac{a_{2017}+\dots+a_1}{2018} < \frac{a_{2017}+\dots+a_1}{2017} = a''_{2018} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a'_{2018}-a_{2017}$ -оос $a''_{2018}-a_{2017}$ нь илэрхий их тул $m \ne 2018$ гэж үзэж болно.

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\dots<\frac{2016}{2017}<\frac{2017}{2018}$, мөн (*) -аас $m\ne 2018 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_{2018}-a_{2017} \le \frac{m-1}{m}(S_r-S_t) \le \frac{2016}{2017}\cdot(S_r-S_t)$.

Хариу нь $\frac{2016}{2017^2}$ тул одоо $S_r-S_t \le \frac{1}{2017}$ -ийг батлахад хангалттай.

Ерөнхий тохиолдолд батлая.

a_m, $\frac{a_m+a_{m-1}}{2}$, ..., $\frac{a_m+\dots+a_0}{m+1}$ -ийн max − min $\le \frac{1}{m+1}$.

$a_0=0$ $a_1=1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{1}=1$ $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ тул суурь үнэн.

$m-1$ үед үнэн гэж m үед батлая.

$a_{m} = \frac{a_{m-1}+a_{m-2}+\dots+a_{m-k}}{k}$

$\ge$, $a_m-a_{m-1} = \frac{(a_{m-2}+\dots+a_{m-k})-(k-1)a_{m-1}}{k} \ge$,

$a_m \in a_{m-1}, \frac{a_{m-1}+a_{m-2}}{2}, \dots, \frac{a_{m-1}+\dots+a_0}{m}$

$a_{m-1} \in a_{m-1}, \dots \dots, \frac{a_{m-1}+\dots+a_0}{m}$

$\Rightarrow a_m-a_{m-1} \le$ Max − Min

$a_{m-1}, \dots\dots, \frac{a_{m-1}+\dots+a_0}{m}$

илэрхийллүүдийн

Биелэх нь:

$\underbrace{0, 1, 1, 1, \dots, 1}_{2016\text{ш}}, \frac{2016}{2017}, \frac{2016+\frac{2016}{2017}}{2017}$