11р сургууль М.Ононболд

Бодлого A1. Хэрэв $n|k$ (эсвэл $k|n$) бол $sn|sk$ байна, мөн $n\neq k$ тул $sn\neq sk$ ба иймд sn ба sk-н хуваагчдын тоо тэнцүү байх боломжгүй (учир нь sn-н аливаа хуваагч sk-г хуваах тул $\tau(sn)\leq\tau(sk)$, гэвч sk нь sk-н хуваагч боловч sn-г хуваахгүй тул $\tau(sn)<\tau(sk)$, энд $\tau(n)=\sum_{d|n}1$). Ө.х нэг нь нөгөөгөө хуваах, тэнцүү биш (n,k) хос бүр бодлогын нөхцөлийг хангахгүй.

Одоо $n\neq k$ ба $n\nmid k$, $k\nmid n$ бол $\exists s:\ \tau(sk)=\tau(sn)$ гэж батлъя. Анхны тоонуудын, $p\in\mathbb{P}$ хувьд $v_p(n)>v_p(k)$ бол $p\in A$, $v_p(n)<v_p(k)$ бол $p\in B$, $v_p(n)=v_p(k)$ бол $p\in C$ байхаар $\mathbb{P}=A\sqcup B\sqcup C$ хуваая. $p\in A:\ v_p(n)>v_p(k)\geq 0 \Rightarrow v_p(n)\geq 1 \Rightarrow p|n$ тул A төгсгөлөг, адилхан B төгсгөлөг байна. $A=\{p_1,p_2,\dots,p_m\}$ ба $B=\{q_1,q_2,\dots,q_l\}$ ба $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{i=1}^{l}q_i^{\gamma_i}\cdot d$, $k=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\beta_i}\cdot\prod_{i=1}^{l}q_i^{\delta_i}\cdot d'$ гэе. $\forall p|d$, $p\in\mathbb{P}$ хувьд $p\neq p_i$, $p\neq q_i$ тул $p\in C$, ө.х $v_p(n)=v_p(k)\Rightarrow v_p(d)=v_p(d')$ байна, иймд $d|d'$. Адилхан $d'|d$ тул $d=d'$ байна. Иймд

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}q_1^{\gamma_1}q_2^{\gamma_2}\dots q_l^{\gamma_l}d$$
$$k=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_m^{\beta_m}q_1^{\delta_1}q_2^{\delta_2}\dots q_l^{\delta_l}d$$

байна. $s=p_1^{x_1-1}p_2^{x_2-1}\dots p_m^{x_m-1}q_1^{y_1-1}\dots q_l^{y_l-1}$ ба $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_l\in\mathbb{N}$ байхаар авъя.

$$n=p_1^{\alpha_1+x_1-1}p_2^{\alpha_2+x_2-1}\dots p_m^{\alpha_m+x_m-1}q_1^{\gamma_1+y_1-1}\dots q_l^{\gamma_l+y_l-1}d$$
$$m=p_1^{\beta_1+x_1-1}p_2^{\beta_2+x_2-1}\dots p_m^{\beta_m+x_m-1}q_1^{\delta_1+y_1-1}\dots q_l^{\delta_l+y_l-1}d$$

Тул

$$\tau(n)=(\alpha_1+x_1)(\alpha_2+x_2)\dots(\alpha_m+x_m)(\gamma_1+y_1)\dots(\gamma_l+y_l)\tau(d)$$
$$\tau(m)=(\beta_1+x_1)(\beta_2+x_2)\dots(\beta_m+x_m)(\delta_1+y_1)\dots(\delta_l+y_l)\tau(d)$$

байна, иймд $\tau(n)=\tau(m)\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i+x_i}{\beta_i+x_i}=\prod_{i=1}^{l}\frac{\delta_i+y_i}{\gamma_i+y_i}$ (*) байна.

$p_i\in A$ тул $v_{p_i}(n)=\alpha_i>\beta_i=v_{p_i}(k)$, адилхан $\delta_i>\gamma_i$. Хангалттай том $u\in\mathbb{N}$ хувьд

$$\begin{cases}1\leq i\leq m: & \beta_i+x_i=(\alpha_i-\beta_i)\cdot(um+i-1) \quad (\alpha_i-\beta_i)(um+i-1)\\ 1\leq i\leq l: & \gamma_i+y_i=(\delta_i-\gamma_i)\cdot(ul+i-1) \quad (\delta_i-\gamma_i)(ul+i-1)\end{cases}$$

байхаар x_i,y_i-г сонгоё (u хангалттай том бол $(\alpha_i-\beta_i)(um+i-1)>\beta_i$ ба $(\delta_i-\gamma_i)(ul+i-1)>\gamma_i$ биелэх). Тэгвэл

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i+x_i}{\beta_i+x_i}=\prod_{i=1}^{m}\frac{(\alpha_i-\beta_i)(um+i-1)+(\alpha_i-\beta_i)}{(\alpha_i-\beta_i)(um+i-1)}=\prod_{i=1}^{m}\frac{um+i}{um+i-1}=\frac{um+m}{um}=\frac{u+1}{u}$$
$$\prod_{i=1}^{l}\frac{\delta_i+y_i}{\gamma_i+y_i}=\prod_{i=1}^{l}\frac{(\delta_i-\gamma_i)(ul+i-1)+(\delta_i-\gamma_i)}{(\delta_i-\gamma_i)(ul+i-1)}=\prod_{i=1}^{l}\frac{ul+i}{ul+i-1}=\frac{ul+l}{ul}=\frac{u+1}{u}$$

болж (*) батлагдан, $\tau(sn)=\tau(sk)$ байх s олдох нь батлагдана.
Иймд $n\nmid k$, $k\nmid n$ байх (n,k) бүр бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодлого A2. Эсрэгээр нь, уг хоёр нөхцөл хоёулаа биелэхгүй гэе.
Тэгэхээр, 1 ба 2-с
$r<1$ рационал бүрийн хувьд $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=r$ байх F цор ганц олдоно. (*) гэж гарна.

Дараах Claim-г батлъя.

Claim S-д тэгсгэлөг тооны тэгш тоо бий.

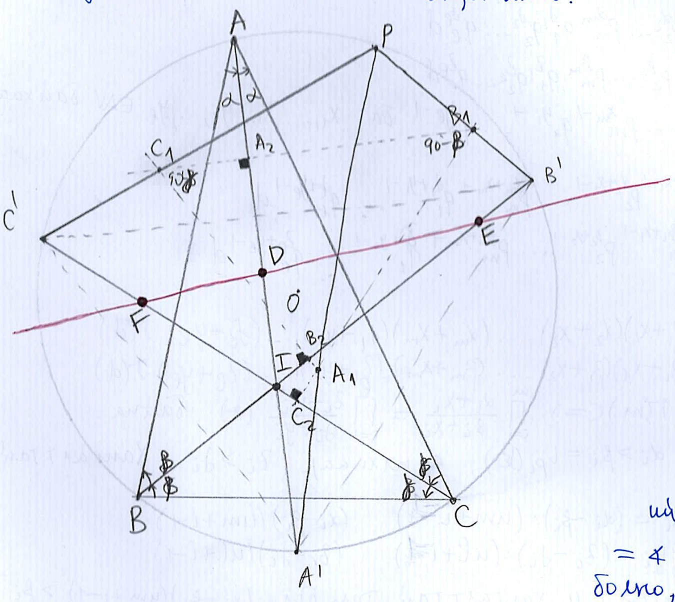
Proof. Эсрэгээр нь, S-д тэгсгэлгүй олон тэгш тоо байдаг гэе.

$0<r<1$, $r\in\mathbb{Q}$ байг. $(*)$ ёсоор $r=\sum_{x\in F}\frac{1}{x}$ байх F тэгсгэлөг S-н дэд олонлог олдоно. $n\in S$, n тэгш тоог $n>2(\max_{x\in F} x)$ байхаар сонгоё, S-д тэгсгэлгүй олон тэгш тоо бий тул энэ нь боломжтой. Тэгвэл

$\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=r=\frac{1}{n}+(r-\frac{1}{n})$. $(*)$ ёсоор $r-\frac{1}{n}=\sum_{x\in G}\frac{1}{x}$ байх G тэгсгэлөг S-н дэд олонлог олдоно. Хэрэв $n\notin G$ бол $r=\frac{1}{n}+\sum_{x\in G}\frac{1}{x}=\sum_{x\in G\cup\{n\}}\frac{1}{x}$ ба $G\cup\{n\}$ ба F нь ялгаатай ($n\in G\cup\{n\}$ ба $n\notin F$ тул) тул энэ нь $(*)$-г зөрчино.

Хэрэв $n\in G$ бол $G'=G\setminus\{n\}$ гэе. Тэгвэл $r-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\sum_{x\in G'}\frac{1}{x} \Rightarrow r=\frac{2}{n}+\sum_{x\in G'}\frac{1}{x}$ $=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\sum_{x\in G'}\frac{1}{x}$ байна, иймд $G'\cup\{\frac{n}{2}\}=G''$ бол $\sum_{x\in}$

<u>Бодлого А3</u>. $\measuredangle XYZ=\measuredangle(XY,YZ)$ чиглэлт өнцөг болно. ~~AIA~~ AI, BI, CI нь Ω-г дахин A', B', C'-д огтолно гэе. Эдгээр нь BC, CA, AB нумын дундаж болно. $x\cap y=C_1$, $y\cap z=A_1$, $x\cap z=B_1$ гэе. $\measuredangle BAI=$ ~~$=\measuredangle CAI$~~ $=\measuredangle IAC=\alpha$, $\measuredangle ACI=\measuredangle ICB=\gamma$, $\measuredangle CBI=\measuredangle IBA=\beta$ ба $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ гэе. AD, BE, CF-н дундажууд A_2, B_2, C_2 байг.

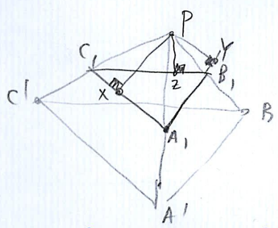


$\measuredangle C_1A_2I=90^\circ=\measuredangle C_1B_2I$ тул $C_1A_2B_2I$ тойрог балтана, иймд $\measuredangle A_1C_1B_1=\measuredangle B_2C_1A_2=$ $=\measuredangle B_2IA_2=\measuredangle BIA=\alpha+\beta=90^\circ-\gamma$ болно, адилхаар $\measuredangle C_1B_1A_1=90^\circ-\beta$ ба $\measuredangle B_1A_1C_1=90^\circ-\alpha$ болно. Мөн $\measuredangle A'C'B'=\measuredangle A'BB'=\beta+\measuredangle A'BC=$ $=\beta+\measuredangle A'AC=\alpha+\beta=90^\circ-\gamma$ ба адилхаар $\measuredangle C'B'A'=90^\circ-\beta$, $\measuredangle B'A'C'=90^\circ-\alpha$ тул $\triangle A_1C_1B_1\sim\triangle A'C'B'$. $A'B=A'I=A'C$ байдаг ($\measuredangle A'BI=90^\circ-\gamma=\measuredangle BIA$ тул) тул, адилхаар $C'A=C'I=C'B$ ба $B'A=B'I=B'C$ гэдгээс $AC'=IC'$, $AB'=IB'$ тул AI-н дундажаас босгосон перпендикуляр $B'C'$ болно, иймд $B'C'\perp AI$. Мөн $B_1C_1\perp AD$ тул $B_1C_1\parallel B'C'$, адилхаар $A_1B_1\parallel A'B'$ ба $A_1C_1\parallel A'C'$. Иймд $P=B'B_1\cap C'C_1$ бол P төвтэй, $C_1B_1\xrightarrow{H}C'B'$ байх H гомотет олдох ба ($B_1C_1\parallel B'C'$ тул) $A_1B_1C_1\sim A'B'C'$ тул $\triangle A_1C_1B_1\xrightarrow{H}\triangle A'C'B'$, ө.х $A_1\xrightarrow{H}A'$ тул $P\in A'A_1$.

Одоо $P\in\Omega$ гэж батлъя.

1р үргэлжлэл

~~A1~~ P-с A_1C_1 ба A_1B_1 руу PX, PY перпендикуляр буулгая. Дараань, A_1C_1 ба $A'C'$-н зай нь $\frac{IE}{2}$ болохыг тэмдэглье (B-с $A'C'$ хүртэлх зай нь, $A'C'$ нь BI-н дундаас босгосон перпендикуляр тул $\frac{BI}{2}$ ба адилхаар B-с A_1C_1 хүртэлх зай $\frac{BE}{2}$, иймд A_1C_1 ба $A'C'$-н хоорондох зай $\frac{BE}{2}-\frac{BI}{2}=\frac{IE}{2}$), адилхаар A_1B_1 ба $A'B'$-н зай $\frac{IF}{2}$ тул $\frac{PX}{\frac{IE}{2}}=\frac{PY}{\frac{IF}{2}} \Rightarrow \frac{PX}{PY}=\frac{IE}{IF}$ байна (Энд P-с A_1C_1 хүртэлх зайг A_1C_1 ба $A'C'$-н хоорондох зайд хуваасан нь $\frac{PA_1}{A_1A'}$ ба иймд P-с A_1B_1 хүртэлх зайг A_1B_1 ба $A'B'$-н хоорондох зайд хуваасантай тэнцүү). $\angle XPY = 180^\circ - \angle YA_1X = 90^\circ+\alpha$ ба $\angle EIF = \angle BIC = 90^\circ+\alpha$ тул $\Delta EIF \sim \Delta XPY$ болно.



Иймд $\angle IFE = \angle PYX = \angle PA_1X$ (учир нь $\angle PYA_1 = \angle PXA_1 = 90^\circ$ тул PYA_1X тойрогт багтана) байна, ө.х $\angle IFE = \angle PA_1C_1$

P-с B_1C_1-д PZ перпендикуляр буулгавал, адилхаар ($C'B'$, C_1B_1-н зай нь $\frac{AI}{2}-\frac{AD}{2}=\frac{ID}{2}$ юм) $\frac{PZ}{\frac{ID}{2}}=\frac{PY}{\frac{IF}{2}}$ $\Rightarrow \frac{PZ}{PY}=\frac{ID}{IF}$ ба $\angle ZPY = \angle ZB_1A_1 = 90^\circ-\beta = \angle DIF$ тул $\Delta IDF \sim \Delta PZY$, иймд $\angle IFD = \angle PYZ = \angle PB_1Z = \angle PB_1C_1$. Тэгэхээр $\angle IFE = \angle IFD$ тул $\angle PA_1C_1 = \angle PB_1C_1 \Rightarrow P \in (A_1B_1C_1)$ байна. P төвтэй H гомотетээр $\Delta A_1B_1C_1 \xrightarrow{H} \Delta A'B'C'$ тул $(A_1B_1C_1)$ тойрог $(A'B'C')$ руу буух, гомотетийн төв P нь $(A_1B_1C_1)$ дээр оршиж тул $P \in (A'B'C')$ буюу $P \in \Omega$ ба Ω ба $(A_1B_1C_1)$ нь P-д огтлолцоно. Бодлого бодогдов.

Бодлого A2 (Үргэлжлэл). $\sum_{x\in G''}\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\sum_{x\in G'}\frac{1}{x}=r$ ба $G''\neq F$ (учир нь $\frac{n}{2}\in G''$ ба $\frac{n}{2}>\max_{x\in F} x$ тул $\frac{n}{2}\notin F$) тул (*)-г зөрчино. Claim батлагдав.

Эндээс, S-д төгсгөлөг тэгш тоо бий тул, $\forall n\in S$: $v_2(n)<u$ байх $u\in\mathbb{N}$ олдоно (чухамдаа $u=1+\max_{\substack{n\in S\\ n \text{ тэгш}}} v_2(n)$ гэвэл ойлгомжтой). $r=\frac{1}{2^u}<1$, эерэг рационал тоо тул $r=\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=\frac{1}{2^u}$ байх төгсгөлөг F олдоно. Эндээс $1=\sum_{x\in F}\frac{2^u}{x}$. $\frac{2^u}{x}$ нь ($v_2(x)<u$ тул) үл хураагдах бутархай хэлбэрт бичвэл хуваарь нь тэгш, тэгэхээр хүртвэр нь сондгой байхаар бичигдэнэ. mod 2-р авч үзвэл, $\frac{2k}{2t+1}\equiv 0 \pmod 2$ тул ($\frac{1}{2t+1}\equiv 1(2)$) $1\equiv 0 \pmod 2$ болж зөрчил.

I – 7
II – 2
III – 7

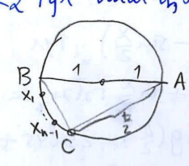
Σ 16

1-р сургууль М. Энхболд

Бодлого Б2. $t \leq 4$ байх бүх t эерэг тоонь бүх хариу юм.

Эхлээд $t \leq 4$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$: периметр нь t-с их байх n ш гурвалжин бүхий сайн олонлог олдоно гэж харуулъя. Дараах хоёр тохиолдлыг авч үзье:

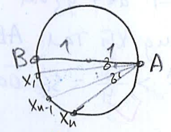
i) $t<4$. ω дээр AB диаметр аваад, $AC = \frac{t}{2}$ байх $C \neq B$ цэг авъя (энд $\frac{t}{2} < 2$ тул ийм цэг олдоно). $n=1$ бол $\triangle ABC$ хувьд периметр нь $2+\frac{t}{2}+BC > 2+\frac{t}{2} > t$ тул $\{\triangle ABC\}$ олонлог бодлогын нөхцлийг хангана.



Б1
Б2-7
Б3-1
Σ=

$n \geq 2$ бол A-г агуулах BC нумыг тэнцүү ~~$X_1, \dots, X_{n-1}$ цэгээр~~ $BX_1, X_1X_2, \dots, X_{n-2}X_{n-1}, X_{n-1}C$ нумууд хуваая. Тэгээд $T = \{\triangle ABX_1, \triangle AX_1X_2, \dots, \triangle AX_{n-2}X_{n-1}, \triangle AX_{n-1}C\}$ гэж сонгоё. $1 \leq i \leq n-1$: $\angle X_iCA = 180 - \angle X_iBA > 90$ тул $AX_i > AC$ (их өнцгийн эсрэг их тал оршино) $\Rightarrow AX_i > \frac{t}{2}$, иймд T-н дурын гурвалжин $\triangle AX_iX_{i-1}$ хувьд (энд $B = X_0$, $C = X_n$ гэе) периметр нь $AX_i + AX_{i-1} + X_iX_{i-1} > AX_i + AX_{i-1} \geq 2 \cdot AC = t$ байна. Иймд T нь уг нөхцлийг хангах сайн олонлог болно.

ii) $t=4$. ω дээр AB диаметр аваад, AB шулууны нэг талд ω дээр $X_1, \dots, X_n$ цэгүүдийг $\angle BAX_1 = \angle X_1AX_2 = \dots = \angle X_{n-1}AX_n = \beta$ байхаар аваад, $T = \{\triangle ABX_1, \triangle AX_1X_2, \dots, \triangle AX_{n-1}X_n\}$ гэж сонгоё. T сайн олонлог байна, одоо аль ч гурвалжны периметр 4-с их байхаар β-г сонгоё.



$AB > AX_1 > \dots > AX_n$ тул $AX_{n-1} + AX_n + X_{n-1}X_n > 4$ гэж батлахад хангалттай, синусын теоремоор $\frac{X_{n-1}X_n}{\sin\beta} = 2 \Rightarrow X_{n-1}X_n = 2\sin\beta$ ба $\angle AX_nB = \angle AX_{n-1}B = 90$ тул $AX_{n-1} = 2\cos\angle BAX_{n-1} = 2\cos(\beta(n-1))$ ба $AX_n = 2\cos(\beta n)$. Иймд $\sin\beta + \cos(\beta(n-1)) + \cos(\beta n) > 2$ байхад хангалттай.

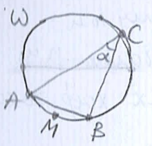
$$\sin\beta + \cos(\beta(n-1)) + \cos(\beta n) = \sin\beta + 2\cos\frac{\beta(2n-1)}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}(2n-1)\right) > 2$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}(2n-1)\right) > 1$. $f(x) = \cos x(\sin x + \cos(x(2n-1)))$ гэе, $f(0) = 1$ болно. $f'(x) = -\sin x(\sin x + \cos(x(2n-1))) + \cos x(\cos x - (2n-1)\sin(x(2n-1))) =$
$= \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x\cos(x(2n-1)) - (2n-1)\cos x\sin(x(2n-1)) \geq \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x - (2n-1)\sin(x(2n-1))$ тул, x хангалттай бага үед $f'(x) \geq \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x - (2n-1)\sin(x(2n-1)) > 0$ (учир нь $\lim_{x \to 0} \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x - (2n-1)\sin(x(2n-1)) = 1$). Ө.х $\exists x_0 : \forall x \in [0, x_0] : f'(x) > 0$. Иймд $f(x)$ нь $[0, x_0]$ дээр өснө, $f(0) = 1$ тул иймд $f(x_0) > 1$ байна. $\beta = 2x_0$ гэж сонговол $\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}(2n-1)\right) = f\left(\frac{\beta}{2}\right) = f(x_0) > 1$ байна.

Одоо $t>4$ бол, хангалттай том n натурал тооны хувьд периметр нь t-с их байх n ш гурвалжнаас тогтох сайн олонлог олдохгүй гэж батлъя.

Claim. ω-д багтах $\triangle ABC$-н периметр t-с их байх $\triangle ABC$ бүрийн хувьд, талбай нь S_0-с их байх $S_0 > 0$ олдоно.

Proof. $\triangle ABC$-н ХБ тал AB, $\angle ACB = \alpha$ гэе. α нь $\triangle ABC$-н ХБ өнцөг байх нь ойлгомжтой, иймд $\alpha < \frac{\pi}{2} = 90$. ω-н C-г ул агуулах AB нумын дун-дах M байг. Птоломейн теоремоор:



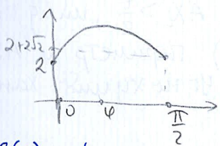
$$MA\cdot(AC+BC) = AC\cdot MB + BC\cdot MA = MC\cdot AB < 2\cdot AB$$

тул, синусын теоремоор

$$t - AB < AC+BC < 2\cdot\frac{AB}{MA} = 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cancel{2}\,4\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow t < AB + 4\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha + 4\cos\frac{\alpha}{2}$$

болно. $f(x) = 2\sin x + 4\cos\frac{x}{2}$ гэе ~~$f'(x)$~~, энд $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Тэгвэл
$f'(x) = 2\cos x + 4\cdot\frac{1}{2}(-\sin\frac{x}{2}) = 2(\cos x - \sin\frac{x}{2}) = 2(1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})$ тул,
$1 = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}$ байх $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ авбал ($g(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$ гэвэл ба энд $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ үед $\frac{x}{2}\in[0,\frac{\pi}{4}]$ тул $\sin\frac{x}{2}$ өсно, $g(0)=0$ ба $g(\frac{\pi}{2}) = 2\sin^2 45 + \sin 45 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$ тул $g(\varphi)=1$ байх $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ олдоно), $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ үед $\sin\frac{x}{2}$ өсөх тул $x\le\varphi$ бол $f'(x)\ge 0$, $x\ge\varphi$ бол $f'(x)\le 0$ байна. $f(0)=4$ ба



$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{4} = 2+2\sqrt{2} > 4$ тул,
f нь $f(0)=4$-с $f(\varphi)$ хүртэл $[0,\varphi]$ дээр өсч,
$f(\varphi)$-с $f(\frac{\pi}{2}) = 2+2\sqrt{2}$ хүртэл $[\varphi,\frac{\pi}{2}]$ дээр буурна.

$f(\alpha) > t$ тул, $y=t$ шулуунаар дээрх графикийг огтолбол, $f(\alpha)>t$ байх α өнцгүүдийн интервал үүснэ, $f(\delta_0)=t$ байх $\delta_0\in[0,\varphi]$-г авч үзвэл $\delta_0>0$ ба $\alpha>\delta_0$ байна. Ө.х $\triangle ABC$-н хб өнцөг $\alpha>\delta_0$, иймд хб тал $AB = 2\sin\alpha > 2\sin\delta_0 = x_0$ байна. Иймд $\triangle ABC$-н талбай $\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4} > \frac{x_0^3}{4} = S_0$ байна. Claim батлагдав ($\delta_0>0$ тул $x_0>0$, иймд $S_0>0$).

Иймээс, $n\cdot S_0 > \pi$ байх n авбал, T гэсн олонлог нь периметр нь t-с их байх nш гурвалжнаас тогтдог бол, уг гурвалжнууд бие биенээ хучихгүй тул T-н талбай уг гурвалжнуудын талбайн нийлбэр болно. Claim ёсоор, аливаа гурвалжны талбай S_0-с их тул T олонлогийн хавтгайд эзлэх талбай $n\cdot S_0>\pi$ болно. Энэ нь T олонлогийн гурвалжин бүр ω-д багтах тул, T олонлог ω дотор багтахыг зөрчино (ω-н талбай π). Бодлого бодогдов.

Бодлого Б3. Эхлээд, (Энд $\forall n: p|f(n)$ байх $p\in\mathbb{P}$ олдохыг батлахад хангалттай)

төгсгөлгүй олон n-н хувьд $p|f(n)$

байх $p\in\mathbb{P}$ олдохыг баталъя. Эсрэгээр нь, $\forall p\in\mathbb{P}$ хувьд $p|f(n)$ байх n төгсгөлөг ш олдоно гэе. Тэгвэл, $\forall p\in\mathbb{P}: \exists M_p: \forall n\ge M_p: p\nmid f(n)$.

Claim1 $(n,m)=1$ ба $n,m \ge \max_{p|f(1)} M_p$ бол (энд $p\in\mathbb{P}$) $(f(n),f(m))=1$ байна.

Proof. Эсрэгээр нь, $\exists q\in\mathbb{P}: q|f(n)$ ба $q|f(m)$ гэе. Хэрэв $n>m$ бол $q\,|\,f(n)\,|\,f(m)+f(n-m)$ тул $q|f(n-m)$ байна. $n'=n-m$ ба $m'=m$ бол $q|f(n')$; $q|f(m')$ болсон. Энэ зарчмаар (Евклидийн алгоритмаар) $(n',m')=(1,1)$ болно, ө.х $q|f(1)$. Гэвч $n,m\ge\max_{p|f(1)} M_p$ тул, $q|f(1)$ тул $q\nmid f(n)$ болж зөрчилд хүрнэ.

Claim2 $(n,m)=d$ бол $(f(n),f(m))\,\cancel{f(d)}$ байна.

1р сургууль М.Өнөболд

Бодлого Б3 (Үргэлжлэл)

Proof. $c = (f(n), f(m))$ ба $p \in \mathbb{P}$: $\alpha = v_p(c)$ байг. Тэгвэл $p^\alpha | c | f(n)$, $p^\alpha | f(m)$. Өмнөхтэй адилаар, хэрэв $n > m$ бол $p^\alpha | f(n) | f(m) + f(n-m)$ тул $p^\alpha | f(n-m)$. Иймд, Евклидийн алгоритмаар $p^\alpha | f(d)$ гэж гарна, иймд $\alpha \le v_p(f(d))$, о.х $v_p(c) \le v_p(f(d))$ for $\forall p \in \mathbb{P}$. Иймд $c | f(d)$ байна. 1

Бодлого Б1. $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ функцууд аваад, k-р үйлдлийн хийсний дараа $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ байрлалд ирдэг (x_i нь i-р нүдэнд чулууны тоо) бол $S_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(i)$ тоог харгалзуулъя. $k+1$-р үйлдэл дээр i-р нүднээс нэг чулууг $i+m$-р нүдэнд аваачдаг бол

$$S_{k+1} = S_k - (f(x_i) - f(x_i - 1)) g(i) + (f(x_{i+m} + 1) - f(x_{i+m})) g(i+m)$$

ба $m \le x_i$ байна (өгсөн нөхцөлөөр). Тохиромжтой f, g-г сонгон, $S_{k+1} - S_k$-г зааглаад, үнэлгээ гаргая.