A1. Хариу: n, k-н нэг нь нөгөөсөө хуваагдахгүй байх (n,k)-хос болгоны хувьд s-олдоно.

- n, k-н нэг нь нөгөөсөө хуваагдах бол $n \vdots k$ -гэе. $\Rightarrow$ ~~n.k-н~~ $k \cdot s$-н бүх хуваагч ns-г хуваах ба болово ~~ks нь-г~~ $n \cdot s$-нь $k \cdot s$-г хуваахгүй ч ns-г хуваах тул ns-нь $k \cdot s$-ээс ялгаатай хуваагчтай.

- ХИЕХ $(n,k) = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ $(x_1, \dots, x_k \geq 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \\ k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \end{array}\right\}$$ -гэе. Мэдээж n, k-нь бие биенээ хуваахгүй тул $\left.\begin{array}{l} \alpha_i > \beta_i \\ \beta_j > \alpha_j \end{array}\right\}$ -байх i, j-олдоно. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \alpha_1 > \beta_1 \\ \beta_2 > \alpha_2 \end{array}\right\}$ -гэж үзэхэд явцуурахгүй. (Мэдээж $k \geq 2$ гэдэг нь мэдээж)

k-аар индукцлэе.

- Суурь $k = 2$ үед.

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$

$k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$

$s = p_1^{k(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1} \cdot p_2^{k(\beta_2 - \alpha_2) - \beta_2 - 1}$ -үед | k-хангалттай их тоо.

ns; ks-түс бүр нь. $k \cdot (k-1) \cdot (\alpha_1 - \beta_1)(\beta_2 - \alpha_2)$-ш хуваагчтай.

- ~~Энэ~~ Таамаг ~~n+k=~~ $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_{s'}}$, $k = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_{s'}}$ - бол ns, ks-нь ижилхэн тооны хуваагчтай ба $\left.\begin{array}{l} V_{p_1}(ns) = (k'+1) \cdot a \\ V_{p_1}(ks) = k' \cdot a \end{array}\right\}$ эсвэл $V_{p_2}(ns) = k' \cdot q$, $V_{p_2}(ks) = (k'+1) \cdot q$.

-байхаар s-олдоно.

- Шилжилт. $k = s'+1$-үед таамаг биелнэ гэж баталъя.

~~Таамаг ёсоор~~ ... гэж $(\alpha_{s'+1} \geq \beta_{s'+1})$-гэе.

$$\left.\begin{array}{l} n = p_1^{\alpha_1} \dots p_{s'+1}^{\alpha_{s'+1}} \\ k = p_1^{\beta_1} \dots p_{s'+1}^{\beta_{s'+1}} \end{array}\right\}$$ -үед. таамаг ёсоор

$\underbrace{\frac{n}{p_{s'+1}^{\alpha_{s'+1}}} \cdot r_1}_{A}$, $\underbrace{\frac{k}{p_{s'+1}^{\beta_{s'+1}}} \cdot r}_{B}$ - нь тэнцүү тооны хуваагчтай

ба $V_{p_1}(A) = (k'+1) a$ } байх r-олдоно.

Энд $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

$\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}>0$ $\Bigg\}\Rightarrow 0<\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*)-оор $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}$ -байх F-олдоно.

Энд F-нь a_{i+1}-г агуулдаг бол $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{a_{i+1}}$ гэе.

$\frac{1}{a_{i+1}}>\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}=\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{a_{i+1}} \Rightarrow$ зөрчил. $\Rightarrow$ F-нь a_{i+1}-г агуулахгүй.

$\sum_{x\in F\cup a_{i+1}}\frac{1}{x}=\sum_{x\in F}\frac{1}{x}+\frac{1}{a_{i+1}}=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{i+1}}=\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_n}.$

Гэтэл $\sum_{x\in\{a_i;a_n\}}=\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_n}.$ Энд S-нь 1-г багтаахгүй $\Rightarrow$

$\Rightarrow F\cup a_{i+1}=\{a_i;a_n\}$. ~~Гэтэл n-нь хан~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{i+1}\in\{a_i;a_n\}$ Гэтэл $a_i\ne a_{i+1}$

n-нь хамгийн томтой тал
$a_n\ne$ i+1-тохиолдол $\Big\}\Rightarrow a_n\ne a_{i+1}\Big\}$

$\Rightarrow$ зөрчил $\Rightarrow$ $\frac{1}{a_i}\geqslant 2\frac{1}{a_{i+1}}\Rightarrow a_{i+1}\geqslant 2a_i$ $\Rightarrow$ индукцээр.

$a_{k+x}\geqslant 2^x\cdot a_k$-байх нь хялбар харна

~~$a_i\geqslant 2^i$ гэдэг нь хялбар ...~~

Хэрэв $a_i\ne 2^i$-байх $\exists i\in\mathbb{N}$-олддог бол.

i=1 бол: $a_1\geqslant 2$.
$i\ne 1$ бол $a_i\geqslant 2^{i-1}a_1=2^i$ $\Big\}\Rightarrow a_i\geqslant 2^i\Rightarrow\boxed{a_i>2^i}\Rightarrow a_i\geqslant 2^i+1.$

$\sum_{x\in S}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{i-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{i+1}}+\dots\right)\le$

$\le\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{i-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{2a_i}+\frac{1}{2^2a_i}+\dots\right)=$

$=1-\frac{1}{2^i}+\frac{1}{a_i}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)=1-\frac{1}{2^i}+\frac{1}{a_i}\le 1-\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^i+1}=1-\frac{2^i+1-2^i}{2^i(2^i+1)}=$

$=1-\frac{1}{2^i(2^i+1)}\Rightarrow r=1-\frac{1}{2^i(2^i+1)+1}$-үед $\forall F\in S$: $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\le\sum_{x\in S}\frac{1}{x}\le 1-\frac{1}{2^i(2^i+1)}<r\Rightarrow\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\ne r\Rightarrow$

$0<r<1$-нь ит.

Б. Батмэнд
1-р сургууль.

гэрээс 1 / 3

A2 Эсрэгээр нь 1 ба 2-нөхцөл нь хоёулаа биелдэггүй байх S-олонлог олдоно гэе.

2-р нөхцөл биелэхгүй $\Rightarrow$ $r<1$-байх $\forall r\in\mathbb{Q}:\ \sum_{x\in F} 1/x = r$ -байх төгсгөлөг элементтэй $F\subseteq S$-дэд олонлог олдоно. (*).

Хэрэв S-нь төгсгөлөг элементтэй бол, F-~~ийг~~ 2 $2^{|S|}$-янзаар сонгоно.
$\Rightarrow$ $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}$ -хэлбэрийн нийлбэр нь ихдээ $2^{|S|}$-янзын утга авна.
гэтэл 1-ээс бага рационал тоо төгсгөлгүй олон бий $\Rightarrow$ ~~2-р~~
~~нөхц~~ (*)-оор $\sum_{x\in F} 1/x$ -нийлбэр нь хязгааргүй олон утга авна. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ зөрчил $\Rightarrow$ S-төгсгөлгүй.

S-н гишүүдийг $a_1<a_2<a_3<\dots$ -гэе.

Хэрэв $a_1=1$-бол.

S-нь үр 2ш нөхцөлийг биелүүлэхгүй бол $S\setminus\{1\}$-нь ч мөн үр
~~нөхц~~ 2ш нөхцөлийг биелүүлэхгүй (S-нь 1-г үл биелүүлнэ $\Rightarrow S\setminus\{1\}$-нь адил,
2-г биелүүлэх бол $\forall F\in S\setminus\{1\}$:
$\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\neq r$-байх r-олдоно. Энд $r<1 \Rightarrow H\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\neq r \Rightarrow$ S-нь мөн адил 2-г биелүүлнэ
$\Rightarrow$ зөрчил.)

. Иймд $a_1\neq 1$ -гэж үзэхэд алдагдахгүй. $\Rightarrow a_1\geq 2$.

Хэрэв $\frac{1}{a_i}<2\frac{1}{a_{i+1}}$ -бол.

Энд $2\leq a_1<a_2<a_3<\dots \Rightarrow$ ~~x-ээс a_x-нь хангалттай том байх~~
$\Rightarrow$ $x<a_x$ -байх нь индукцээр хялбар гарна.

$0<2\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}$ $\Rightarrow$ Энд $2\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}$ -рационал тоо $\Rightarrow$ $\frac{1}{h}<2\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}$ -~~байх~~ h-нь хангалттай том үед.
-олдоно. $\Rightarrow$ $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{h}<2\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_i}<2\frac{1}{a_{i+1}}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}<\frac{1}{a_{i+1}}$.

$\Rightarrow$ (*) - биелэхгүй $\Rightarrow$ зөрчил $\Rightarrow$ $a_i = 2^i$. | Б. Батлисэд 1-р дүгнэлт | цаас 2/3

(*) - од $\frac{2}{3} = \sum_{x \in F} \frac{1}{x}$ - байх F олдоно. F-н гишүүдийг $2^{b_1}; 2^{b_2}; \dots; 2^{b_k}$ - гэе $\Rightarrow$ $(b_1 < b_2 < \dots < b_k)$.

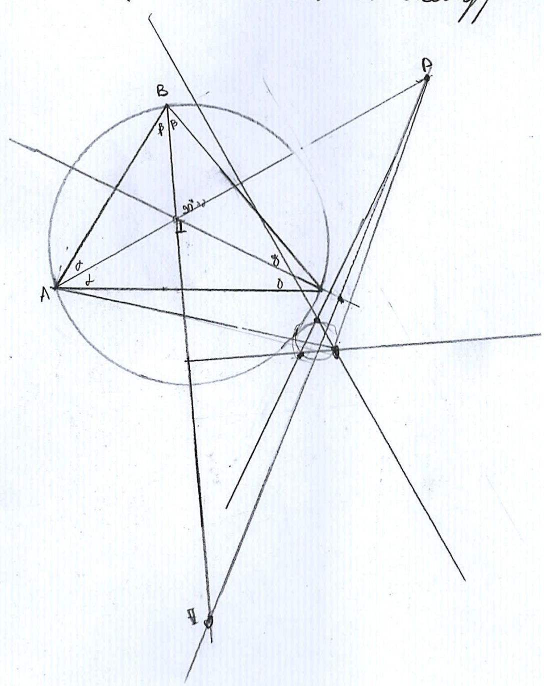
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2^{b_1}} + \frac{1}{2^{b_2}} + \dots + \frac{1}{2^{b_k}} \quad / \cdot 2^{b_k} \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{1+b_k} = 3\left(2^{b_k - b_1} + 2^{b_k - b_2} + \dots + 2^{b_k - b_k}\right)$$

Энд $\left.\begin{array}{l} 2^{b_k - b_1}; \dots; 2^{b_k - b_k} \in \mathbb{N} \\ 2^{1+b_k} \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{1+b_k} \vdots 3 \Rightarrow 2 \vdots 3 \Rightarrow$ зөрчил $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ өгсөн 2-н нөхцлийг зэрэг биелүүлэх~~тоо олд~~ S-олдохгүй $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ аль нэгнийх нь биелүүлнэ.



I – 1
II – 7
III – 0

$\sum$ 8