Бодлого A1. Б. Долгормаа.

Хариу нь $n \nmid k$ мөн $k \nmid n$, үед.

$n > k$ үед $k \mid n$ гэе.

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, $\alpha_i \geq 1$ гэвэл $k = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_m^{\beta_m}$, $\beta_i \leq \alpha_i$.

$\forall s = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_m^{\gamma_m} \cdot p_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \cdots p_\ell^{\gamma_\ell}$ хувьд,

$d(ns) = ns$-ийн хуваагдагчийн тоо $= (\alpha_1+\gamma_1+1)(\alpha_2+\gamma_2+1)\cdots(\alpha_m+\gamma_m+1)\cdot(\gamma_{m+1}+1)\cdots(\gamma_\ell+1)$

$d(ks) = ks$-ийн хуваагдагчийн тоо $= (\beta_1+\gamma_1+1)(\beta_2+\gamma_2+1)\cdots(\beta_m+\gamma_m+1)\cdot(\gamma_{m+1}+1)\cdots(\gamma_\ell+1)$.

$\forall j$-н хувьд $\alpha_j+\gamma_j+1 \geq \beta_j+\gamma_j+1$ тул $d(ns) = d(ks)$ байх боломж нь бүгд $=$ үед болоод энэ үед $\alpha_j = \beta_j$, $\forall j \Rightarrow n = k$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймээс $k \mid n$ үед $d(ns) = d(ks)$ байх s олдохгүй.

Одоо $k \nmid n$ үед ~~болохгүй~~ s-олдохыг батлая $(k<n)$.

$n = p_1^{\alpha_1-1} \; p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_m^{\alpha_m-1}$, $\alpha_i \geq 1$ мөн $\alpha_i+\beta_i>2$, $\exists\, \beta_j > \alpha_j$ ~~гэе~~ ~~байна~~ гэе.

$k = p_1^{\beta_1-1} \; p_2^{\beta_2-1} \cdots p_m^{\beta_m-1}$, $\beta_i \geq 1$

$s = p_1^{\gamma_1} \; p_2^{\gamma_2} \cdots p_m^{\gamma_m}$ байг.

$(\alpha_1+\gamma_1)(\alpha_2+\gamma_2)\cdots(\alpha_m+\gamma_m) = (\beta_1+\gamma_1)(\beta_2+\gamma_2)\cdots(\beta_m+\gamma_m)$ байх ёстой

буюу $\dfrac{(\alpha_1+\gamma_1)\cdots(\alpha_m+\gamma_m)}{(\beta_1+\gamma_1)\cdots(\beta_m+\gamma_m)} = 1$ байх $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ олдохыг харуулах хэрэгтэй.

(1) $\dfrac{\alpha_i+\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i} = \dfrac{k}{k+1}$ хэлбэртэй байлгах γ_i олдоно. Ялангуяа

~~$\beta_i \; \alpha_i(k+1)$~~ $\gamma_i = \beta_i k - \alpha_i(k+1)$ тул $\dfrac{\beta_i}{\alpha_i} \geq \dfrac{k+1}{k} > \dfrac{k+2}{k+1} > \dfrac{k+3}{k+2} > \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \left[\dfrac{\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}; \infty\right[$. ($\beta_i > \alpha_i$ үед).

(2) $\alpha_i > \beta_i$ үед $\dfrac{\alpha_i+\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i} = \dfrac{x+y}{y}$ x-дурын y-хангалттай том байх γ_i олдоно.

$\alpha_i y + \gamma_i \cdot y = \beta_i(x+y) + \gamma_i(x+y) \Rightarrow y(\alpha_i-\beta_i) = x(\beta_i+\gamma_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ y-ийн x-т хуваагдах хангалттай том тоогоор сонгоход

$\gamma_i = \dfrac{y(\alpha_i-\beta_i)}{x} - \beta_i$.

$\alpha_j = \beta_j$ байх $j \in \overline{1,m}$ бүрийн хувьд $\gamma_j = 0$ гээд

$\alpha_i > \beta_i$ байх $i \in \overline{1,m}$ -ийн тоо $\geq$ $\alpha_j < \beta_j$ байх $j \in \overline{1,m}$-ийн тоо байг ($\leq$ байсан ч ялгаагүй).

Нэг $\alpha_i > \beta_i$ бүрийн хувьд доор хаяж нэг $\alpha_j < \beta_j$ хос ноогдсон байхаар бүлгүүдэд хуваагаад бүлэг бүрийн хувь дахь $\frac{\Pi(\alpha+\gamma)}{\Pi(\beta+\gamma)}$ харгалзан 1 болгоё. ($\alpha_j < \beta_j$ байх хосууд бүгд нэг, нэг бүлэгт орсон байна).

Нэг бүлгийн хувьд жишээ үзүүлбэл:

$\alpha_{j_1} < \beta_{j_1}$, $\alpha_{j_2} < \beta_{j_2}$, ..., $\alpha_{j_x} < \beta_{j_x}$, $\alpha'_{i} > \beta'_i$ гэсэн гишүүдтэй бол:

$$\max\left(\left[\frac{\alpha_{j_k}}{\beta_{j_k}-\alpha_{j_k}}\right]+1 \;\middle|\; k \in \overline{1,x}\right) = A$$ гэе. Тэгвэл (1)-ээс

$$\frac{\alpha_{j_k}+\gamma_{j_k}}{\beta_{j_k}+\gamma_{j_k}} = \frac{(A-1)+k}{A+k}$$, $k \in \overline{1,x}$ байх γ_{j_k}, $k \in \overline{1,x}$ олдоно.

Тэгвэл $$\frac{\alpha_{j_1}+\gamma_{j_1}}{\beta_{j_1}+\gamma_{j_1}} \cdot \frac{\alpha_{j_2}+\gamma_{j_2}}{\beta_{j_2}+\gamma_{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_{j_x}+\gamma_{j_x}}{\beta_{j_x}+\gamma_{j_x}} = \frac{A}{A+1} \cdot \frac{A+1}{A+2} \cdot \ldots \cdot \frac{(A-1)+x}{A+x} = \frac{A}{A+x}$$

болох бөгөөд

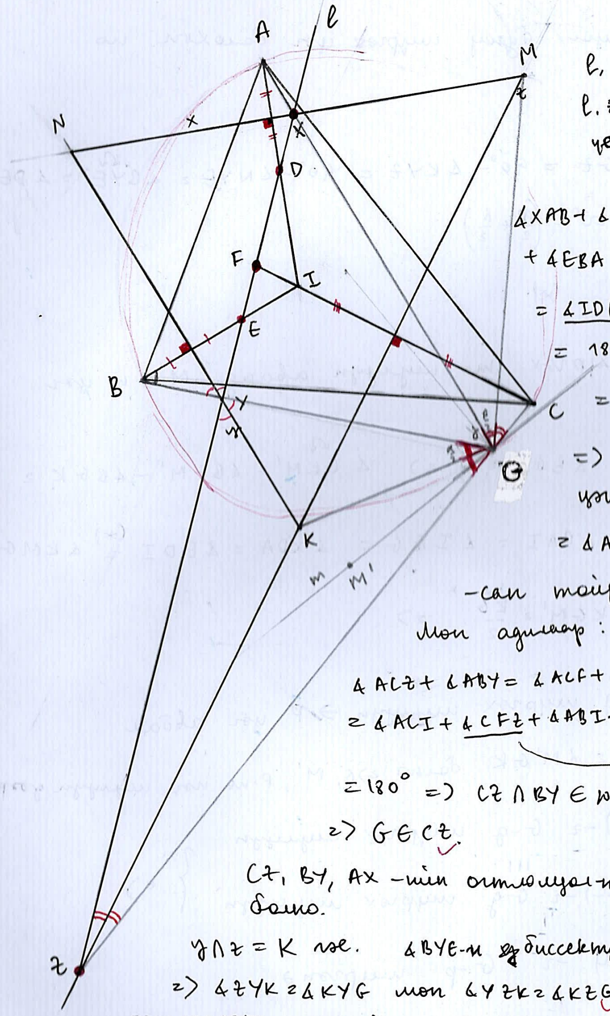
(2)-оос $$\frac{\alpha'_i+\gamma'_i}{\beta'_i+\gamma'_i} = \frac{A+x}{A}$$ байхаар авах боломжтой.

(A хангалттай том биш бол A-г өсгөх боломжтой).

Тэгэхээр энэ бүлгийн $\frac{\Pi(\alpha+\gamma)}{\Pi(\beta+\gamma)} = 1$ болно.

Энэ үеийн бүх бүлгийн хувьд ийнхүү $=1$ болох боломжтой.

Бодлого А3. Б. Долгорнээ.



l, x шулууны огтлолцол X,

l, y шулууны огтлолцол Y.

l, z шулууны огтлолцол Z цэгээр тэмдэглэе.

$\angle XAB + \angle YBA = \angle XAD + \angle DAB + \angle YBE +$
$+ \angle EBA = \angle XDA + \angle IAB + \angle \cancel{Y}EB + \angle IBA =$
$= \underline{\angle IDE} + \angle IAB + \underline{\angle IED} + \angle IBA =$
$= 180^\circ - \angle AIB + \angle IAB + \angle IBA =$
$= 2(\angle IAB + \angle IBA) = \alpha + \beta. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ XA, YB-ийн огтлолцлын цэгийг G гэвэл $\angle AGB = \gamma = \angle ACB \Rightarrow$ G нь $ABC\Delta$-г багтаасан тойрог дээр оршино.

Мөн адилаар:

$\angle ACZ + \angle ABY = \angle ACF + \angle FCZ + \angle ABE + \angle EBY =$
$= \angle ACI + \underline{\angle CFZ} + \angle ABI + \underline{\angle BEY} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + (180^\circ - \underset{\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}}{\angle FIE}) =$
$= 180^\circ \Rightarrow CZ \cap BY \in \omega(\Delta ABC)$, $BY \cap \omega(\Delta ABC) = G \Rightarrow$
$\Rightarrow G \in CZ$.

CZ, BY, AX-ийн огтлолцлын цэг G ба $G \in \omega(\Delta ABC)$ байна.

$y \cap z = K$ гэе. $\angle BYE$-н биссектрисс y шулуун $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ZYK = \angle KYG$ мөн $\angle YZK = \angle KZG \Rightarrow K$ нь ΔYZG-н биссектриссүүдийн огтлолцол цэг байна $\Rightarrow \angle YGK = \angle KGZ = \frac{\angle YGZ}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Мөн адилаар: x нь $\angle AXD$-н биссектрисс $\Rightarrow$ $\angle ZXD$-ийн гадаад бисс $= X$; ~~ZX~~ z нь $\angle XZD$-н бисс $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \cap x = M$ гэвэл $\angle XGC$-ийн бисс нь GM байна. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XGM = \angle MGC = \frac{\angle XGC}{2} = \frac{\beta}{2}$. $\Rightarrow \angle KGM = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2}$.

$x \cap y = N$ гэвэл N, $(NM \cap AI)$, I, $(NK \cap BI)$ - нэг тойрог $\Rightarrow$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MNK = 180^\circ - \angle AIB = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\Rightarrow \angle KGM + \angle MNK = 180^\circ \Rightarrow G \in \omega(\Delta KMN)$ буюу $G \in \omega(\Delta \Theta)$.

$\Rightarrow$ G нь $\omega(\triangle ABC)$ болон $\omega(\triangle MNK)$-ийн огтлолцол болох нь батлагдана.

~~...~~ Тойргийн огтлолцол буюу шүргэх цэг болохыг нь батлая.

$$\angle MKG = \angle KZG + \angle KGZ = 90^\circ - \angle KYZ = 90^\circ - \angle NYE = \angle B\overset{\frown}{YE} = \angle DEI$$

мөн $\angle MGK = \angle DIE = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle MKG \sim \triangle DEI$. (*)

$\omega(\triangle ABC)$-г G-д шүргэх m шулууныг аваад $M' \in m$ цэг авъя. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle BGM' = \frac{\breve{BG}}{2}$ $\quad \angle BGK = \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle GKM' = \angle BGM' - \angle BGK =$

$= \frac{\breve{BG}}{2} - \frac{\alpha}{2} = \angle BAG - \angle BAI = \angle IAG = \angle XDA = \angle EDI \overset{(*)}{=} \angle KMG =$

$= \frac{\breve{KG}}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle KGM' = \frac{\breve{KG}}{2}$ $\Rightarrow$

~~$\omega(\triangle ABC$~~ $\omega(\triangle \Theta)$-г G-д шүргэх шулуун $\ni P$ цэг авбал

$\angle PGK = \frac{\breve{KG}}{2} = \angle M'GK$ болно $\Rightarrow G, M', P$ нь нэг шулуун дээр

оршино $\Rightarrow$

$\omega(\triangle \Theta)$-г G-д шүргэх шулуун

$\equiv$

$\omega(\triangle ABC)$-г G-д шүргэх шулуун $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\omega(\triangle \Theta)$ нь $\omega(\triangle ABC)$-г G-д шүргэнэ.

I − 7
II − 0
III − 7

Нийт 14

Бодлого Б1. Б. Долгорпил

A дугаарлалт : Үйлдэл хийхийн өмнө чулуунуудаа n-р нүдэнд авчрах дараалаар хамгийн сүүлд очих чулуу 1, сүүлээсээ 2-т очих чулуу 2, …, хамгийн түрүүнд очих чулуу n гэж дугаарлая.

i-р үйлдэл дээр A дугаарлалтын дагуу j-р чулуу ходолгох нүдний тоог $m_{i,j}$ гэж тэмдэглэе.

Нийт S ~~нүүдэл~~ үйлдэл хийсэн гэвэл $i \in \overline{1,S}$, $j \in \overline{1,n}$.

$k_{l,j} = m_{i,j}$, l нь $m_{i',j}$-ийн тоо, $i' \le i$ байх

$\forall j \in \overline{1,n}$ хувьд нийт $m_{i,j}$-ийн тоо S_j байгаа гэвэл $l \in \overline{1,S_j}$.

(1) $\forall j \in \overline{1,n}$ хувьд $m_{i,j} \le j$.

A дугаарлалтын дагуу j-р чулууны ард буюу зүүн талд j-1 ш чулуу үлдэх тул бодлогын нөхцөл ёсоор ихдээ j нүдээр нүүнэ.

(2) $\sum_{l=1}^{S_j} k_{l,j} \ge n$, $\forall j \in \overline{1,n}$.

A дугаарлалтын дагуу j дугаартай чулуу үйлдэл бүрийн дараа солигдох боломжтой хэдий ч ард нь яг j-1 ш чулуу үлдсэн байх ёстой учир шинэ j нь хуучин j-ийн баруун талд байх боломжгүй. (Тэгвэл j чулуу шинэ j-ийн зүүн талд байх болно) => Нийт j-үүдийн туулах нүд дор хаяж n байна.

$$\cancel{n^2 = S_{1,1}+\dots+S\ m_{1,1}+\dots+m_{S,n} \overset{(2)}{\le} (k_{1,1}+\dots+k_{S_1,1})+\dots+(k_{1,n}+\dots+k_{S_n,n})}$$

~~Иймээс~~ $\forall j \in \overline{1,n}$ хувьд

$$\cancel{\forall \le \Sigma k}\ n \overset{(2)}{\le} k_{1,j}+k_{2,j}+\dots+k_{S_j,j} \cancel{\le \Sigma m_{i,j}} \overset{(1)}{\le} S_j \cdot j \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{n}{j} \le S_j$ болох ба

$S = S_1+S_2+\dots+S_n \ge \lceil\frac{n}{1}\rceil + \lceil\frac{n}{2}\rceil + \dots + \lceil\frac{n}{n}\rceil$ болж батлагдана.

Б1 - 1+6

Б2 - 5

Б3 - 2

$\Sigma = 8+6 = 14$

Бодлого Б2.

Тойргийн талбай $= \pi r^2 = \pi$.

(1) Тойргийн диаметр $= 2 \Rightarrow$ тойрогт багтах гурвалжны талууд ≤ 2.

(2) Диаметрээр талаа хийсэн ихдээ 2Δ байна $\Rightarrow$ 2-оос бусад Δ-ны талууд < 2.

(3) Хэрэв ~~Δ-ны талб~~ бодлогын нөхцлүүдийг хангах, $P > a$ байх $\forall \Delta$-ны талбай $\geq S$, ~~$S \in \mathbb{R}^+$~~, $S>0$ бол тойргийн талбай π гэсэн хязгаартай гэдгээс $n > \frac{\pi}{S}$ байх n-ий хувьд 2-р нөхцөл буюу дотоод еронхий цэгүй байх нь ~~зөрчид~~ зөрчигдөнө.

$P > t$ үед ~~дэ~~ бодлогын 2 нөхцөл биелдэг.

$\forall a, b, c$ талтай бүхий Δ-ны хувьд

$$S_\Delta = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)} \overset{(1)}{\geq} \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-2\right)\left(\frac{p}{2}-2\right)\left(\frac{p}{2}-2\right)} > \sqrt{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}-2\right)\left(\frac{t}{2}-2\right)\left(\frac{t}{2}-2\right)} \Rightarrow$$

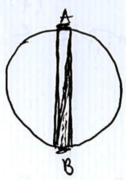
$\Rightarrow$ ~~$t > 4$ үед~~ $t > 4$ үед $\frac{t}{2} - 2 > 0$, $\frac{t}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}-2\right)^3} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (3)-н дагуу бодлогын нөхцлийг хангахгүй болж зөрчилд хүрнэ.

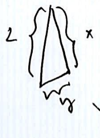
$t = 4$ үед (2)-ийн дагуу 2-оос бусад Δ-ны талууд 2-т хүрэхгүй

$\Rightarrow S_\Delta \geq \sqrt{2 \cdot (2-a)(2-b)(2-c)} > 0$ болж (3)-аар зөрчилд хүрнэ.

Иймээс $t < 4$.

Байгуулалт нь  ~~диал~~ диаметрт маш ойрхон 2 шулууг авaад ~~завсруудын~~ нь A, B хэсэг дээр ~~ойрхон~~ цэгүүдээ аваад Δ болгох.

Δ-ны т/бишээр



$x + y > 2$ тул

$\to p > t$

Бодлого Б3. Б. Долгормаа.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ хувьд $f(n+1) \mid f(n) + f(1)$ =>

=> $\left.\begin{array}{l} (f(n+1), f(1)) \mid f(n) \\ (f(n+1), f(1)) \mid f(1) \end{array}\right\}$ => $(f(n+1), f(1)) \mid (f(n), f(1))$.

=> $f(1) \vdots (f(1), f(2)) \vdots (f(1), f(3)) \vdots (f(1), f(4)) \vdots \dots$

Хэрэв $\min(f(1), f(m)) > 1$, $m \in \mathbb{Z}^+$ бол $c = \min(f(1), f(m))$ байна.

Харин $\min(f(1), f(m)) = 1$ ~~бол~~ байх $m \in \mathbb{Z}^+$ олддог ~~ба~~ба тэдгээрийн min M байдаг бол $\forall m \geq M$ хувьд $(f(1), f(m)) = 1$ байна. $2^x \geq M$ ~~...~~ байг.

$f(1) \vdots 2$ үед :

$2^x f(1) \vdots 2^{x-1} f(2) \vdots \dots \vdots f(2^x)$ => $2^x f(1) \vdots f(2^x)$, $(f(1), f(2^x)) = 1$ ($2^x \geq M$ тул) мөн => $(2, f(2^x)) = 1$ тул $f(2^x) = 1$ болох болно Зөрчилд хүрлээ.

Иймээс $f(1) \vdots 2$ үед $c > 1$ - олдоно.

2