Олонлог тов сургууль А.Пүрэвзаяа.

Бодлого A1.

$n\neq k$ (n,k) хос a-тооны хуваагчийн тоо $d(a)$ гэж тэмдэглэе.

$n \vdots k$, эсвэл $k \vdots n$ бол болохгүйг харуулъя. (Нэг нь нөгөөгөө хуваадаг)

Тэгш эрхтэй тул $n \vdots k$ гэе

$n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$ $\alpha_i\in\mathbb{N}_0$

$k = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_t^{\beta_t}$ $\beta_i\in\mathbb{N}_0$

$s = p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdots p_t^{\gamma_t}$ $\gamma_i\in\mathbb{N}_0$

$p_i\in\mathbb{P}$ $(i=\overline{1,t})$

гэе. $n \vdots k$ тул $\alpha_j\geq\beta_j$, $j=\overline{1,t}$ б/на

$d(sn)=(\alpha_1+\gamma_1+1)(\alpha_2+\gamma_2+1)\cdots(\alpha_t+\gamma_t+1)$

$d(ks)=(\beta_1+\gamma_1+1)(\beta_2+\gamma_2+1)\cdots(\beta_t+\gamma_t+1)$

болно.

$j=\overline{1,t}$ ба $\underset{\Downarrow \atop \alpha_j\geq\beta_j}{\alpha_j+\gamma_j+1\geq\beta_j+\gamma_j+1}$ б/на. Бүгд (=) үед $d(sn)=d(sk)$ болно.

Гэвч бүгд (=) б/на $\Rightarrow n=k$ болж зөрчил үүсэх $\Rightarrow$ ядаж 1ш эрс тэнцэл б/на $\Rightarrow$ Нэг нь нөгөөгөө хуваадаг тоонууд нөхцөлийг хангахгүй.

Одоо нэг нь нөгөөгөө хуваадаггүй үед болно гэж харуулъя.

$n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}\cdot q_1^{a_1}\cdot q_2^{a_2}\cdots q_r^{a_r}\cdot u_1^{v_1}\cdots u_w^{v_w}$

$k = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_t^{\beta_t}\cdot q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdots q_r^{b_r}\cdot u_1^{v_1}\cdots u_w^{v_w}$

ба $p_i\in\mathbb{P}$, $i=\overline{1,t}$; $q_i\in\mathbb{P}$, $i=\overline{1,r}$; $u_i\in\mathbb{P}$, $i=\overline{1,w}$

ба $\alpha_i>\beta_i$, $i=\overline{1,t}$, $a_j<b_j$ $j=\overline{1,r}$ ба $\alpha_i,\beta_i,a_j,b_j\in\mathbb{N}_0$, $v_j\in\mathbb{N}$ $j=\overline{1,w}$ хэлбэртэй бичиж болно. Нэг нь нөгөөгөө хуваадаггүй $\Rightarrow$ ядаж нэг p_i ядаж нэг q_i олдоно. $s=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdots p_t^{\gamma_t}\cdot q_1^{c_1}\cdot q_2^{c_2}\cdots q_r^{c_r}$ хэлбэртэй хайна. $\frac{d(ns)}{d(ks)}=1$ б/хын тулд.

$$\frac{d(ns)}{d(ks)}=\frac{(\alpha_1+\gamma_1+1)\cdots(\alpha_t+\gamma_t+1)\cdot(a_1+c_1+1)\cdots(a_r+c_r+1)\cdot\cancel{(v_1+1)\cdots(v_w+1)}}{\underbrace{(\beta_1+\gamma_1+1)\cdots(\beta_t+\gamma_t+1)\cdot(b_1+c_1+1)\cdots(b_r+c_r+1)}_{\text{энэ нь 1 б/х ёстой.}}\cdot\cancel{(v_1+1)\cdots(v_w+1)}}$$

тул

$\alpha>\beta$ ба $A>\beta$ б/г. Тэгвэл $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{A+1}{A}$ б/х $\exists\gamma$ гэж харуулъя.

$\alpha=\beta+\beta_0$ б/г. $1+\frac{\beta_0}{\beta+\gamma}=1+\frac{1}{A}\Rightarrow\frac{\beta_0}{\beta+\gamma}=\frac{1}{A}\Rightarrow\gamma=\beta_0A-\beta>0$, $A-\beta>0$ $\Rightarrow$

γ олдоно. $(*)$ гэе.

$\ldots_1+1>\beta_1+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha_1+\gamma_1+1}{\beta_1+\gamma_1+1} = \dfrac{B+1}{B}$

$\ldots_2+1>\beta_2+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha_2+\gamma_2+1}{\beta_2+\gamma_2+1} = \dfrac{B+2}{B+1}$

$\ldots$

$\ldots_t+1>\beta_t+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha_t+\gamma_t+1}{\beta_t+\gamma_t+1} = \dfrac{B+t}{B+t-1}$

Ийм хэлбэртэй б/хаар $\gamma_1, \ldots \gamma_t$ -г сонгоно.

Нөгөө талаас

$\ldots_1+1>a_1+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{b_1+c_1+1}{a_1+c_1+1} = \dfrac{C+1}{C}$

$\ldots_2+1>a_2+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{b_2+c_2+1}{a_2+c_2+1} = \dfrac{C+2}{C+1}$

$\ldots$

$\ldots_r+1>a_r+1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{b_r+c_r+1}{a_r+b_r+1} = \dfrac{C+r}{C+r-1}$

Ийм хэлбэртэй б/хаар $c_1, \ldots c_r$-г сонгоно

$$\frac{d(nS)}{d(kS)} = \frac{\cancel{B+1}}{B} \cdot \frac{\cancel{B+2}}{\cancel{B+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{B+t}{\cancel{B+t-1}} \cdot \frac{C}{\cancel{C+1}} \cdot \frac{\cancel{C+1}}{\cancel{C+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{C+r-1}}{C+r} = 1 \text{ б/х ёстой}$$

$\Rightarrow \dfrac{B+t}{B} \cdot \dfrac{C}{C+r} = 1. \Rightarrow \cancel{BC}+tC = \cancel{BC}+Br \Rightarrow \dfrac{t}{r} = \dfrac{B}{C}$ б/х ёстой

болно $\Rightarrow B = m \cdot t,\ C = m \cdot r$ хэлбэртэй ба $(*)$ нөхцөлийг биелүүлэх-ийн тулд $m \geq \max\{\beta_i+1,\ i=\overline{1,t}$ ба $a_j+1,\ j=\overline{1,r}\}$ б/хаар сонговол $(*)$ нөхцөл биелж B, C олдоно $\Rightarrow S = p_1^{\gamma_1} \ldots p_t^{\gamma_t} \cdot q_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot q_r^{c_r}$ б/хаар сонгоно

$\Rightarrow$ хариу: $n \neq k$, (n,k) хос нь нэг нь нөгөөдөө хуваагддаггүй тоонууд.

Олонлог тов сургууль А. Пүрэвзаяа.

Бодлого А2.

Эсрэгээр нь аль 2 нөхцөл биелдэггүй гэж үзвэл:

- $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=\sum_{x\in G}\frac{1}{x}$ б/х F ба G төгсгөлөг дэд олонлог олдохгүй (1)
- $r<1$ б/х r бүрийн хувьд $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}=r$ б/х F төгсгөлөг дэд олонлог олдоно. (2)

гэж нөхцөлтэй болно.

~~S олонлог a тоо 2-ыг б/вал {a}, {a} нь S-ээс давхцахгүй хоёр үл хамаатай $\frac{2}{a}\leq 1$ ба~~

S олонлогт a тоо 2-ыг б/вал $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}>\frac{1}{b}$ $a\neq b\in S$ б/х b олдвол
$(a>2)$

зөрчил үүснэ. Учир нь $\frac{2}{a}<1$ ба $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=r$ гэвэл $1>r$ тул $r=\frac{1}{r_1}+\dots+\frac{1}{r_k}$

байх $\exists r_1,\dots r_k\in S \Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{r_1}+\dots+\frac{1}{r_k}$ болж (1) нөхцөлийг (ижил элемент орвол 1,2-т орж болно)

зөрчино. $\Rightarrow S'=\{a_1,a_2,\dots,a_n\dots\}$ ба $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_n\leq\dots$ гэе.

a) $1\in S'$ бол 2-ыг нь S'-д орохгүй. $\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ (тул)

Лемм.

$\alpha,\beta\in S'$ ба $\alpha>\beta$ бол $\alpha\geq 2\beta$ б/на. (Энд $\alpha,\beta\neq 1$.)

Баталгаа. Эсрэгээр нь $2\beta>\alpha>\beta$ гэж үзвэл

$\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}<\frac{2}{\alpha}$ болно $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=r>0$ гэе $r=\frac{1}{r_1}+\dots+\frac{1}{r_k}$ б/х $\exists r_1,\dots r_k\in S'$

$\frac{1}{\alpha}>r$ тул $\frac{1}{\alpha}\neq\frac{1}{r_j}$, $j=\overline{1,k}$ б/на. $\Rightarrow \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{r_1}+\dots+\frac{1}{r_k}$ болж (1)-г

зөрчино. $\Rightarrow \alpha>\beta$ бол $\alpha\geq 2\beta$ б/на. $(\beta\in S', \{\alpha,r_1\dots r_k\}\in S')$

S'' нь S'-ээс 1-ийг авсан дэд олонлог болно.

$S''=\{b_1,b_2,\dots b_n\dots\}$ $b_1\geq 2$ ба ижил элемент б/хгүй

~~ба~~ $\Rightarrow$ Лемм ёсоор $b_n\geq 2^n$ б/на. Нөхцөл (2)-г биелэхгүйг харах тул 1 ямар нэгэн үзүүлэхгүй.

$b_k>2^k$ б/х ХБ k-г авч үзье.

$\frac{1}{b_k}<\frac{1}{2^k}$ $\frac{1}{b_k}+k_0=\frac{1}{2^k}$ б/г. $1>r>1-k_0$ б/х r олдоно.

Энэ r-ийн хувьд (2) биелэхгүй учир нь S'-н нийт нийлбэр 1-рүү

дөхнө. $\frac{1}{b_k}+k_0=\frac{1}{2^k}$ олдоно $\Rightarrow$ $1-k_0$ рүү дөхнө. $\Rightarrow r$ хүрэхгүй. $\Rightarrow$ (2) биелэхгүй.

тийм k олдохгүй буюу $b_n = 2^n$ б/н. $r = \frac{1}{3}$ гэж авбал:

Эн $\frac{1}{3} = \frac{1}{2^{r_1}} + \dots + \frac{1}{2^{r_s}}$ $\Big| \cdot 3 \cdot 2^{r_s}$ $r_1 < r_2 < \dots < r_s$

$2^{r_s} = 3 \cdot (2^{r_s - r_1} + 2^{r_s - r_2} + \dots + 2^{r_s - r_s}) \Rightarrow 2^{r_s} \vdots 3$ болж зөрчил

үүсэв $\Rightarrow$ энэ үед (2)-биелэхгүй.

б.) 1 нь S-д ордоггүй б/н.

$S = \{b_1, b_2, \dots b_k, c_2, c_3, \dots c_n \dots\}$ гэж бичнэ.

$b_i = 2$, $i = \overline{1,k}$. $2 < c_2 < c_3 \dots < c_n < \dots$ б/н.

$c_2 \geq 2^2$, ба лемм ёсоор $c_n \geq 2^n$ б/на.

$c_k > 2^k$ б/н ХБ k-г авч үзье.

$\frac{1}{c_k} < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \frac{1}{c_k} + k_0 = \frac{1}{2^k}$ б/н.

Мөн $1 > r > 1 - k_0$ б/х $\exists r$.

$\sum_{x \in F} \frac{1}{x} = r$ б/х F олонлог 2 нь ~~тэгш~~ 2-оос олон орж болохгүй.

$\frac{1}{2} \cdot s > 1$, $s > 1$ б/на. $\Rightarrow F$ нь $\{b_1, c_2, c_3, \dots c_n \dots\}$-н

дэд олонлог б/на. Энэ олонлог S' гэвэл S'-н гишүүдийн

урвуу нийлбэр 1-рүү дөхнө. Гэвч $\frac{1}{c_k} = \frac{1}{2^k} - k_0$ тул

$1 - k_0$ рүү дөхнө $\Rightarrow r$ хүрэхгүй.

Ийм k олдохгүй буюу $c_n = 2^n$ бол $r = \frac{1}{3}$ үед мөн үзэгдэр

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^{r_1}} + \dots + \frac{1}{2^{r_s}}$ $\Big| \cdot 3 \cdot 2^{r_s}$ $r_1 < r_2 < \dots < r_s$

$2^{r_s} = 3(2^{r_s - r_1} + \dots + 2^{r_s - r_s}) \Rightarrow 2^{r_s} \vdots 3 \Rightarrow$ зөрчил. $\Rightarrow$ Ямар ч r

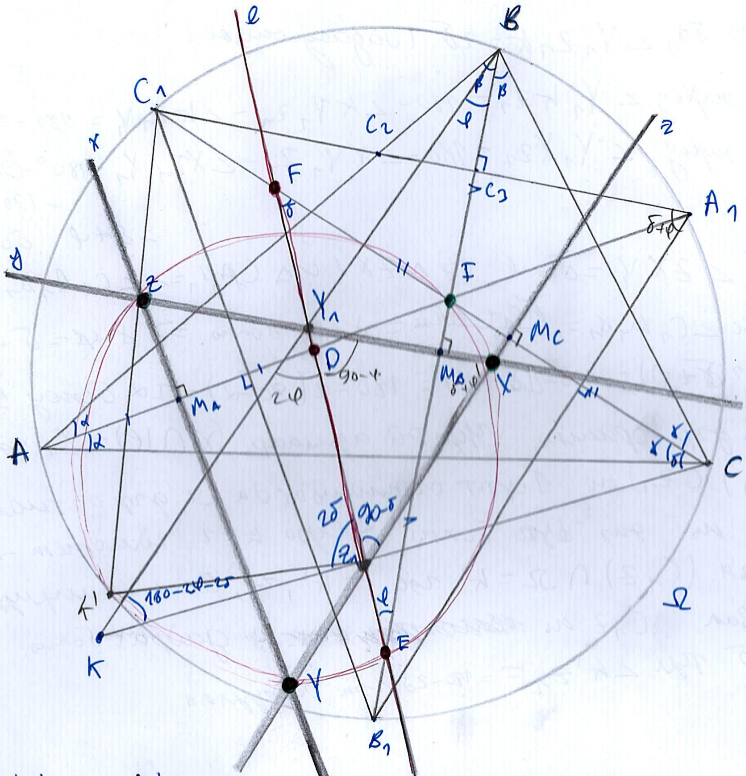
эерэг бүхэл тоон S олонлогийн хувьд бодлогын 2 нөхцөлийн

аль нэг нь биелнэ.

Энд $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)$ нийлбэр 1 рүү дөхөхийг ашиглав.

Олонлог төв сургууль А.Пүрэвзана.

Бодлого А3.



$(x)\cap(y)=Z$, $(z)\cap(y)=X$, $(z)\cap(x)=Y$ гэе. $(BI)\cap\Omega=B_1$, $(CI)\cap\Omega=C_1$, $(AI)\cap\Omega=$ A_1
$\angle ABB_1=\angle B_1BC=\beta$, $\angle BAA_1=\angle A_1AC=\alpha$, $\angle BCC_1=\angle C_1CA=\gamma$ гэе.
$(C_1A_1)\cap(AB)=C_2$ гэе. $\angle BC_2A_1=\dfrac{\breve{AC_1}+\breve{BA_1}}{2}=\gamma+\alpha \Rightarrow (BB_1)\cap(C_1A_1)=C_3$
гэвэл $\angle BC_3C_2=180-\angle C_2BC_3-\angle BC_2C_3=180-\beta-\gamma-\alpha=90°$ (учир нь $\alpha+\beta+\gamma=$
$\Rightarrow C_1A_1\perp B_1B$ ба $y//C_1A_1$ буюу $ZX//C_1A_1$ болно.
Үүнтэй яг адилаар $AA_1\perp C_1B_1$, $C_1C\perp B_1A_1$ болох ба мөн
$ZY//C_1B_1$, $XY//A_1B_1 \Rightarrow \triangle ZXY \sim \triangle C_1A_1B_1$ болно. $\Rightarrow \triangle XYZ$-н
баталсан тойргийг Ω_1 гэвэл Ω_1 болон Ω-ын шүргэлцэхийн түү
гомотет-н төв нь Ω дээр б/х ёстой. Үүнийг батална.
$(l)\cap(y)=Y_1$ гэе. $(BY_1)\cap(CZ_1)=K$ гэе. K-г Ω дээр оршихыг
$(l)\cap(z)=Z_1$ харуулъя.
~~АХ~~ BE-н дундаж нь M_B, CF-н дундаж нь M_C, ~~AD~~-н дундаж нь M_A гэе.
$\angle Y_1BM_B=\varphi$ гэе. Тэгвэл $\angle Y_1EM_B=\varphi$ болно. ($\triangle Y_1BE$ нь адил хажуут болох)
$\Rightarrow \angle M_BY_1E=90-\varphi$ мөн $\angle KY_1Z_1=2\varphi$ (Босоо өнцөг)

$\angle M_c F Z_1 = \delta$ гэвэл $\angle Z_1 C M_c = \delta$ болно ($\Delta F Z_1 C$ нь адил хажуут).

$\Rightarrow \angle F Z_1 M_c = 90 - \delta$, $\angle Y_1 Z_1 K = 2\delta$ (Гадаад өнцөг.)

$\Delta Y_1 K Z_1$-н хувьд $\angle Y_1 K Z_1 = 180 - \angle K Y_1 Z_1 - \angle K Z_1 Y_1 = 180 - 2\delta - 2\varphi$.

$\Delta Y_1 X Z_1$-н хувьд $\angle Y_1 X Z_1 = 180 - \angle X Y_1 Z_1 - \angle X Z_1 Y_1 = 180° - (90 - \delta) - (90 - \varphi) = \delta + \varphi$ болно.

$\cancel{\Delta Y_1 Z X}$ $\Rightarrow \angle Z X Y = \delta + \varphi \Rightarrow \Delta Z X Y \sim \Delta C A B_1 \Rightarrow \angle C_1 A_1 B_1 = \delta + \varphi$

нөгөө талаас $\angle C_1 A_1 B_1 = \dfrac{\breve{AC_1} + \breve{AB_1}}{2} = \gamma + \beta$ болно. $\Rightarrow \gamma + \beta = \delta + \varphi \Rightarrow$

$\angle BKC = 180 - 2(\delta + \varphi) = 180 - 2(\gamma + \beta) = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$ буюу $\dfrac{\breve{BC}}{2} = 2\alpha$

$\Rightarrow K$ нь Ω дээр оршино. Ижилээр адилаар $(X) \cap (\ell) = X_1$ гэвэл.

(AX_1), (BY_1) (CZ_1) нь 1 цэгт огтлолцох ба Ω дээр огтлолцох болно. K цэг нь энэ цэг болно $\Rightarrow$ Одоо K-г гомотет-ийн төв гэж харуулъя. $(C_1 Z) \cap \Omega = K'$ гэе. K', Z_1, C-г 1 шулуун гэж харуулвал $C_1 Z$ нь ~~[illegible]~~ K-г дайрах болно.

$\angle F Z_1 C = 2\delta$ тул $\angle K' Z_1 F = 180 - 2\delta$ гэж харуулна.

I – 7

II – 6

III – 3

Σ 16

Олонлог төв сургууль Амарзаяа овогтой Пүрэвзаяа.

Б1 − 7
Б2 − 5
Б3 − 7
Σ = 19

Бодлого Б3.

$f(1) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ б/г. $\{2,3,\dots\}$ руу буулгалт байгаа тул дор хаяж 1 анхны тоонд хуваагдана. $p_i \in \mathbb{P}$ $i=\overline{1,s}$

$f(1)$-н хуваагч аль нэг p_k нь төгсгөлгүй олон f-н утгыг хуваадаг бол $c=p_k$ болно гэж харуулъя.

p_k-д хуваагддаг f-үүд $f(a_1), f(a_2) \dots f(a_n) \dots$
$1=a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ б/г.

$a_n = n$ гэдгийг сөрөөр бодъё.

$f(1) \vdots p_k \Rightarrow a_1 = 1.$

$f(a_2) \mid f(a_2-a_1) + f(a_1) \Rightarrow p_k \mid f(a_2) \mid f(a_2-a_1) + f(a_1)$ ба

$p_k \mid f(a_1) \Rightarrow f(a_2-a_1) \vdots p_k$ болно. $a_2 > a_2 - a_1 > 0 \Rightarrow a_2 - a_1 = a_1$
буюу $a_2 = 2$ байхаас өөр аргагүй.

n-ээс бага бүх үед үнэн гэж үзээд n үед баталъя.

$f(a_n) \mid f(a_1) + f(a_n - a_1)$
$f(a_n) \mid f(a_2) + f(a_n - a_2)$
$\dots$
$f(a_n) \mid f(a_{n-2}) + f(a_n - a_{n-2})$
$f(a_n) \mid f(a_{n-1}) + f(a_n - a_{n-1})$

байна $f(a_n) \vdots p_k$ ба $f(a_1), \dots f(a_{n-1}) \vdots p_k$ тул $f(a_n - a_i) \vdots p_k$ $i = \overline{1, n-1}$ болно
$a_n > a_n - a_1 > a_n - a_2 > \dots > a_n - a_{n-2} > a_n - a_{n-1}$
$\Rightarrow a_n - a_1 = a_{n-1}$
$a_n - a_2 = a_{n-2}$
$\dots$
$a_n - a_{n-2} = a_2$
$a_n - a_{n-1} = a_1$

б/я ёстой болж $a_n = n$ болж $f(1)$ нь өө олон тоог хуваах тул бүх f-н утгыг хуваах болов.

$p_k \mid f(1)$ б/н p_k-д хуваагддаг өө олон f-н утга б/бол f-н бүх утга p_k-д хуваагдах болно. (*) гэе.

~~a) $f(n) = f(n-k) + f(k)$ $1 \le k \le n-1$ б/дал $f(n)$ нь өө олон олдох үед.ийн гадартай f-үүдийг $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n), \dots$~~
~~$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ гэе.~~

~~өө олон тул $f(1)$-д өө олон утгыг үлдээгээд олдох $f(\alpha_i)$ үүд олдоно. (Олдохгүй гэвэл төгсгөлөг байх зөрчил үүсэх) Эдгээр утгыг үлдээгээд олдох f-үүд-г $f(\beta_1), f(\beta_2) \dots f(\beta_n) \dots$~~
~~$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$~~
~~гэе. $1 \le \beta_i < \beta_{i+1}$, $i = \overline{1,\infty}$ тул $f(\beta_{i+1}) = f(\beta_{i+1} - \beta_i) + f(\beta_i)$ болно.~~
~~$f(\beta_{i+1} - \beta_i) = f(\beta_{i+1}) - f(\beta_i) \equiv 0 \ (f(1))$ ба~~

~~$i=\overline{1,\infty}$ $f(\beta_{i+1}-\beta_i) \vdots f(1)$ болно. => $f(1)$-д хуваагддаг ω олон~~

~~f-н утга олдоно => ~~ $f(1)$-н дурын~~

~~хуваагч p_k б/г. Тэгвэл $(*)$ ёсоор $c=p_k$ болно.~~

~~б) $f(n)=f(n-k)+f(k)$ $1\le k\le n-1$ б/х f тоосоло үүд.~~

~~$f(n)<f(n-k)+f(k)$ $1\le k\le n-1$ б/х f ω олон б/на.~~

~~=> Эдгээр f-үүд нь $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n) \dots$~~

~~$\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\dots$ б/г.~~

~~$i=\overline{1,\infty}$, $f(\alpha_i)<\max\{f(\alpha_i-k)\mid 1\le k\le\alpha_i-1\}$ б/на.~~

~~хэрэв $f(\alpha_i)>\max\{f(\alpha_i-k)\mid 1\le k\le\alpha_i-1\}$ бол~~

а) $f(n)>\max\{f(n-k)\mid 1\le k\le n-1\}$ б/х $f(n)$ ω олон олддог бол

Эдгээр f-үүдийг $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n) \dots$

$\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\dots$ гэе.

$i=\overline{1,\infty}$, $f(\alpha_i) \mid \underset{1\le k\le \alpha_i-1}{f(k)+f(\alpha_i-k)}$ ба $f(\alpha_i)>f(k)$, $f(\alpha_i)>f(\alpha_i-k)$

тул $2f(\alpha_i)>f(k)+f(\alpha_i-k)$ => $f(k)+f(\alpha_i-k)=f(\alpha_i)$ болно.

Энэ тохиолдолд $f(\alpha_i)$-үүд дотор p_k-д ижил үлдэгдэл өгдөг ω олон утга бий (тоосоло тэгвэл $f(\alpha_i)$-үүд тоосоло болох зөрчил)

Эдгээрийг $f(\beta_1), f(\beta_2) \dots f(\beta_n) \dots$

$\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_n<\dots$ гэе.

$i=\overline{1,\infty}$ $f(\beta_{i+1})=f(\beta_i)+f(\beta_{i+1}-\beta_i)$ б/на =>

$f(\beta_{i+1}-\beta_i)=f(\beta_{i+1})-f(\beta_i)\equiv 0\ (p_k)$ болно =>

$i=\overline{1,\infty}$ ба $f(\beta_{i+1}-\beta_i)$ нь p_k-д хуваагдах ω олон ~~f-н~~ утга =>

$(*)$ ёсоор $c=p_k$ болно.

б.) $f(n)>\max\{f(n-k); 1\le k\le n-1\}$ б/х $f(n)$ тоосоло ш үүд. =>

$f(n)\le\max\{f(n-k); 1\le k\le n-1\}$ нь ~~[illegible]~~ ω олон

$f(n)$ нь зааглагдсан болно. Үгүй нь ямар ах тоолос

эхлэн $f(n)\le\max\{f(n-k); 1\le k\le n-1\}$ нь биелнэ.

Олонлог ТОВ сургууль Амарзаяа овогтой Пүрэвзаяа.

Бодлого №3 (Үргэлжлэл)

$f(n)$ - зааглагдсан => тогтмол тооны утга авна. => f-н утгуудыг хуваадаг анхны тоо тогтмол.

$q_1, \dots q_t$ нь ∞ олон утга хуваадаг анхны тоонууд (дор хаяж 1ш q байх ёстой)

б/г. Харин $r_1, \dots r_m$ нь тогтмол тооны утга хуваадаг анхны тоонууд б/г.

Тэгвэл $\exists N$, $N \le n$ хувьд $(f(n), r_1 \cdot r_2 \cdots r_m) = 1$

(Учир нь r_i бүр тогтмол утга хуваадаг)

$i=\overline{1,t}$, q_i-н хувьд $\min\{d_i \mid f(d_i) \vdots q_i\}$-г авъя. Тэгвэл

q_i нь $f(d_i), f(2d_i), f(3d_i) \dots f(n d_i), \dots$ -г хуваадаг гэж харуулъя. q_i нь $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \dots f(\alpha_n) \dots$; $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ -г хуваадаг б/г.

Индукцлэе. $\alpha_j = j \cdot d_i$ гэж харуулъя.

$f(d_i) \vdots q_i$ — суурь үнэн. ($\alpha_1 = d_i$)

j-ээс бага бүх үед үнэн гэж үзээд j-үед баталъя.

$$f(\alpha_j) \mid f(\alpha_1) + f(\alpha_j - \alpha_1)$$
$$f(\alpha_j) \mid f(\alpha_2) + f(\alpha_j - \alpha_2)$$
$$\dots$$
$$f(\alpha_j) \mid f(\alpha_{j-2}) + f(\alpha_j - \alpha_{j-2})$$
$$f(\alpha_j) \mid f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

$\Rightarrow q_i \mid f(\alpha_k)$, $k=\overline{1,j}$ $\Rightarrow$

$q_i \mid f(\alpha_j - \alpha_m)$, $m = \overline{1, j-1}$

$\alpha_j > \alpha_j - \alpha_1 > \alpha_j - \alpha_2 > \dots > \alpha_j - \alpha_{j-2} > \alpha_j - \alpha_{j-1}$

$\Rightarrow \alpha_j - \alpha_1 = \alpha_{j-1}$
$\alpha_j - \alpha_2 = \alpha_{j-2}$
$\dots$
$\alpha_j - \alpha_{j-2} = \alpha_2$
$\alpha_j - \alpha_{j-1} = \alpha_1$

болж $\alpha_j = j \cdot d_i$ бат-в ▲

$f((N+1) \cdot d_1 \cdot d_2 \cdots d_t) \mid f((N+1) d_1 \cdot d_2 \cdots d_t - 1) + f(1)$ -г авч үзвэл

$N < (N+1) \cdot d_1 \cdot d_2 \cdots d_t$
$N < (N+1) d_1 \cdot d_2 \cdots d_t - 1$

б/н.а. Мөн $f((N+1) d_1 \cdot d_2 \cdots d_t) \vdots q_1 \cdots q_t$

ба $(f((N+1) \cdot d_1 \cdot d_2 \cdots d_t - 1), r_1 \cdot r_2 \cdots r_m) = 1$ тул $f(1) \vdots q_t$ олдоно.

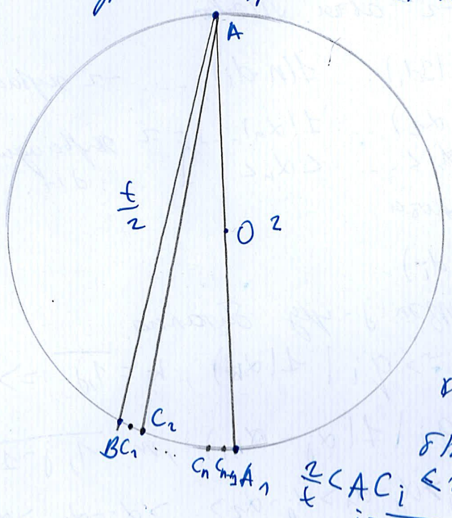
$f(1) : q_k$ ба q_k нь ∞ олон утга хураадаг $\Rightarrow$ (*) ёсоор $c = q_k$ болно. $\Rightarrow$ ▲

Бодлого Б2.

$t < 4$ гэж хариулна.

I. $t < 4$ үед Тополог олдохыг баталъя.

$\frac{t}{2} < 2$. б/на 1 нэгж радиустай тойрог ХИ дээ 2 ~~урт~~ уртай хөвч багтана $\Rightarrow$ $\frac{t}{2}$ нь багтана.



O-тойргийн төв $AB = \frac{t}{2}$ б/г. ω-тойрог. $(AO) \cap \omega = A_1$ гэе. Тэгвэл $AA_1 = 2$ б/г.

$\overset{\frown}{BA_1}$ нум (жижиг) дээр дурын C цэг авахад $\frac{2}{t} < AC < 2$ б/на. (C нь B, A_1-ээс ялгаатай.) $\Rightarrow$

$\overset{\frown}{BA_1}$ нум дээр $(n+1)$ ш цэг авъя. C_1 нь B, C_2-ын хооронд C_{n+1} нь C_n, A_1-ын хооронд, C_i нь C_{i-1}, C_{i+1}-ын хооронд ($i = \overline{2,n}$) байхаар сонгоод:

$\frac{2}{t} < AC_i < 2$ ($i = \overline{1,n+1}$) б/на. $\Rightarrow$ $\triangle AC_iC_{i+1}$ ($i = \overline{1,n}$) нь Тополог болно. Периметр: $\triangle AC_iC_{i+1}$ ($i = \overline{1,n}$) нь $AC_i + AC_{i+1} + C_iC_{i+1} > t$

$AC_i > \frac{t}{2}$

$AC_{i+1} > \frac{t}{2}$

$C_iC_{i+1} > 0$

б/на.

II. $t \geq 4$ үед. периметр нь t-ээс их. $\Rightarrow$ 4-өөс их б/на. $d > 4$ б/г p-н хувьд $p \leq d$ б/г периметртэй ~~тоо~~ Тополог олддог гэж үзвэл $d = 4 + d_0$ б/г. $d_0 > 0$.

Δ-ын талбай $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Герон

$a, b, c \leq 2$ (ω-д ХИ дээ 2 уртай хөвч багтана. $p \geq 2 + \frac{d_0}{2}$ б/на.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \sqrt{(2+\frac{d_0}{2})(\frac{d_0}{2})^3} > 0$ б/на. Тэгвэл $\sqrt{(2+\frac{d_0}{2})(\frac{d_0}{2})^3} = S_\Delta$ гэе.

Олонлог төв сургууль Амарзаяа овогтой Пүрэвзаяа,

Бодлого Б2 (Үргэлжлэл)

S_ω-н тойргийн талбай бол $\frac{S_\omega}{S_\Delta} < n$ б/х n-н гурвалу

Тохиолдол олдохгүй болж зөрчил үүсгэв $\Rightarrow$ $t \geq 4$ үед болохгүй.

Хариу: ($t < 4$) үед.

Бодлого Б1

Эхлээд 0 дугаартай нүдэнд байгаа n ш чулуунуудыг $1, 2, \dots n$ гэж дугаарлая. Үүнээс хойш зарим дугаарыг үйлдэл хийхэд дараах байдлаар өөрчлөгдөнө.

k-дугаартай нүднээс m дугаартай нүдрүү чулуу шилжсэн б/г. Үүнийг k дугаартай нүдэнд б/гаа ХИ дугаартай чулуу буюу s дугаартай чулуу гэж үзэж болно (k нүдэнд б/гаа чулуунууд тэгш эрхтэй)

m дугаартай нүдэнд байсан чулуунуудаас ХБ дугаартай нь t дугаартай чулуу б/сан гэе.

Хэрвээ s чулуу хоосон нүдэнд буувал s чулууны дугаар n болж n-ээс s+1 чулуунуудын дугаар (-1)-ээр өөрчлөгдөх k-1, ... s болно.

s чулууг m-рүү шилжүүлэхэд Дугаар: $s \to (t-1)$ болж $i \to i-1$ ($i = \overline{s+1, t-1}$) болно гэж үзье. Энэ дугаарын өөрчлөлтөөр p, p+1 дугаартай чулуунуудын хувьд p нь хэзээ ч (p+1)-н урдуурхгүй болно. (ХИ-гээ хамт 1 нүдэнд б/на)

Тэгвэл c дугаарт б/гаа чулуунуудын аль чулууг зөөх ходолгооны аль үзье буюу энэ c дугаарт дугаартай нь б/дог тул илүү c ш чулуутай нүдийг гарна. Зөөгдөх чулуу ХИ $\Rightarrow$ 1 үйлдлээр илүү c нүд зөөгдөнө $\Rightarrow$ дор хаяж $\lceil \frac{n}{c} \rceil$ ш удаа зөөгдөнө. $\Rightarrow c = \overline{1, n} \Rightarrow$ нийт $\sum_{c=1}^{n} \lceil \frac{n}{c} \rceil$ болно. ▲