Бүс, дүүргийн бодолт 2019–2020

Дүүргийн математикийн олимпиад, 5-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 120 мин (2 цаг)

1. Сургуулийн аялалд явсан сурагч бүрээс ангийнх нь хэдэн сурагч хамт явсныг асуухад 10 хүүхэд дөрөв, 12 хүүхэд гурав, 6 хүүхэд хоёр, 4 хүүхэд нэг гэж хариулжээ. Сурагч бүр ангийн багштайгаа хамт явсан бөгөөд ангийнх нь аль нэг сурагч нь аялалд явсан тохиолдолд л багш нь аялалд оролцсон бол хэдэн сурагч, хэдэн багш аялалд явсан бэ?

Нэг ангийн хүүхдүүдийг ирмэгээр холбон граф үүсгэвэл K_5, K_5, K_4, K_4, K_4, K_3, K_3, K_2, K_2 үүснэ. Нийт хүүхдийн тоо хариулт өгсөн хүүхдийн тоо тул

$$10 + 12 + 6 + 4 = 32$$

байна. Харин ангийн тоо нь $2 + 3 + 2 + 2 = 9$ тул 9 багш аялалд явжээ.

2. Гурван тоорой ширээ тойрон суугаад самар цөмж гэнэ. Ахмад тооройг 3 самар цөмөхөд дунд тоорой 4 самар цөмдөг, харин дунд тооройг 3 самар цөмөхөд отгон тоорой 5 самар цөмдөг байв. Тэд гурвуулаа нийлээд 2460 самар цөмсөн бол дунд тоорой хэдэн самар цөмсөн бэ?

Хариу: 720 самар цөмнө.

Ахмад тоорой $3 \times 3 = 9$ самар цөмөхөд дунд тоорой $4 \times 3 = 12$ самар цөмнө. Харин отгон тоорой $5 \times 4 = 20$ самар цөмнө. Тэр гурав хамтдаа $9 + 12 + 20 = 41$ самар цөмнө. $2460 \div 41 = 60$. Иймд дунд тоорой $60 \times 12 = 720$ самар цөмнө.

3. Самбарт анх a гэсэн натурал тоо бичигдсэн байв. a тоог арчаад оронд нь $2 \times a$ тоог эсвэл $2 \times a + 1$ тоог бичиж болно. Энэ үйлдлийг хийсээр байгаад 2019-ийг бичиж болдог бол a тоог “онцгой” тоо гэе. Хэдэн онцгой тоо байгаа вэ?

Хариу: 10 онцгой тоо байгаа.

$2019 \leftarrow 2 \times 1009 + 1$, $1009 \leftarrow 2 \times 504 + 1$, $504 \leftarrow 2 \times 252$, $252 \leftarrow 2 \times 126$, $126 \leftarrow 2 \times 63$, $63 \leftarrow 2 \times 31 + 1$, $31 = 2 \times 15 + 1$, $15 = 2 \times 7 + 1$, $7 = 2 \times 3 + 1$, $3 = 2 \times 1 + 1$ тул 2019 нь

$$1009, 504, 252, 126, 63, 31, 15, 7, 3, 1$$

гэсэн 10 онцгой тооноос л үүсч болно.

4. Багш самбарт таван цифрийн үржвэрийг бодсон жишээ бичсэн байжээ. Бат жишээний хоёр цифрийг нь арчаад оронд нь хоёр цифр бичиж

$$4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 2247$$

гэсэн илэрхийлэл гаргажээ. Тэгвэл багш анх самбарт ямар жишээ бичсэн байсан бэ?

Хариу: Самбарт анх

$$4 \times 5 \times 4 \times 7 \times 4 = 2240$$

эсвэл

$$4 \times 7 \times 4 \times 5 \times 4 = 2240$$

гэсэн жишээ байсан. Сүүлд гарсан илэрхийллийн хувьд гурван ширхэг тэгш үржигдэхүүнтэй байгаа тул анх байсан илэрхийллийн дор хаяж нэг үржигдэхүүн тэгш байсан. Иймд үржвэрийн утга тэгш тоо гарах ёстой. Өөрөөр хэлбэл хамгийн сүүлийн 7 цифрийг шинээр бичсэн. Энэ тохиолдолд хоёр ширхэг 5 цифрийн ядаж нэг нь анх байсан тул үржвэр нь 10-д хуваагдана. Иймд сүүлийн цифр нь 0 байжээ. Хэрвээ үржигдэхүүнүүдийн аль нэгийг шинээр бичээгүй гэвэл анх

$$4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 1600$$

гэсэн жишээ байх ёстой. Гэтэл энэ нь боломжгүй юм. Иймд сүүлийн 0 цифрээс өөр цифр үржвэрээс өөрчлөгдөөгүй. Иймд үржвэр нь 2240 байсан бөгөөд аль нэг 5 цифрийг шинээр бичсэн. Эндээс зөвхөн

$$4 \times 5 \times 4 \times 7 \times 4 = 2240$$

эсвэл

$$4 \times 7 \times 4 \times 5 \times 4 = 2240$$

гэсэн хоёр боломж байгаа нь харагдаж байна.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 6-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 150 мин (2 цаг 30 мин)

1. 6А ангийн 32 сурагч ямар нэг дугуйланд суралцдаг ба энэ ангид 2 сурагч зэрэгцэн суудаг 24 ширээ байдаг. Математикийн хичээлийн түвшин тогтоох шалгалтыг 2, 3, 4, 5 гэсэн дүнгээр дүгнэх бөгөөд 6А ангийн хөвгүүдийн дундаж дүн 4-тэй, охидын дундаж дүн 3.25-тай тэнцүү гарчээ. Харин ангийн сурагчдын дундаж дүн 3.6-тай тэнцүү байсан бол энэ анги хэдэн охинтой вэ?

Хариу: 6А анги 45 сурагчтай 24 охинтой.

Анги x хөвгүүнтэй, y охинтой гэе. Тэгвэл $32 \leq x + y \leq 48$ байна. Хөвгүүдийн дүнгийн нийлбэр $4x$, охидын дүнгийн нийлбэр $3.25y$ ба ангийн сурагчдын авсан дүнгийн нийлбэр

$$4x + 3.25y = 3.6(x + y)$$

болно. Эндээс $8x = 7y$ буюу $x : y = 7 : 8$ болж ангийн сурагчдын тоо $x + y$ нь 15-д хуваагдах ёстой. 32-оос 48-ын хооронд орших 15-д хуваагддах цор ганц тоо нь $x + y = 45$ болно. $x : y : (x + y) = 7 : 8 : 15$ тул $x = 21$, $y = 24$ байна.

2. 8×8 хэмжээтэй шатрын хөлгийн зүүн доод буланд цагаан тэрэг, зүүн дээд буланд хар тэрэг байрласан байв. Цагаан тоглогч өөрийн ээлжинд цагаан тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийнх нь дагуу 2 юмуу 4 нүд, хар тоглогч хар тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийнх нь дагуу 3 юмуу 5 нүд нүүж болно. Эхэлж цагаан тоглогч нүүнэ, дараа нь хар тоглогч нүүнэ гэх мэтээр ээлжилж нүүнэ. Хар тоглогч яг 10 дахь нүүдлээрээ цагаан тэргийг идэх (өөрийн тэргийг цагаан тэрэг байгаа нүдэнд байрлуулах) боломжтой юу?

8×8 хэмжээтэй шатрын хөлгийн зүүн доод ба зүүн дээд булан өөр өнгийн нүднүүд юм. Тэрэг тус бүр тэгш удаа нүүсний дараа өөрийн анх байсан нүдтэй ижил өнгийн нүдэнд байрлана. Иймд яг 10 нүүгээд хар тэрэг, цагаан тэргийг идэх боломжгүй юм.

3. 1×10 хүснэгтийн нүднүүдэд $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ цифрүүдийг нэг нэгээр нь бичих болов. Эхлээд аль нэг нүдэнд 0-ийн цифр бичнэ. Дараа нь 0-ийн цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хөрш нүдэнд 1-ийн цифр бичнэ. Дараа нь ямар нэг цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хоосон хөрш нүдэнд 2-ийн цифр бичнэ гэх мэтээр бүх цифрийг хэчнээн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

Хариу: $2^9 = 512$ ялгаатай аргаар бичиж болно.

Хамгийн анх бичигдсэн 0-ийн цифрийн баруун гар талд байгаа цифрүүд нь өсөх эрэмбэтэй 9-өөс олонгүй оронтой тоо үүсгэнэ. Харин үлдэх цифрүүд нь 0 цифрийн зүүн гар талд буурах эрэмбээр бичигдэнэ. Өөрөөр хэлбэл бичлэг бүр нь 0 цифрийн баруун талд байгаа цифрүүдээр бүрэн тодорхойлогдоно. Энэ тоо нь 9 элементтэй олонлогийн дэд олонлогийн тоо буюу $2^9 = 512$ гэсэн хариу гарна.

4. $n < S(n) + 2019$ нөхцөлийг хангах n натурал тоо хэчнээн ширхэг байх вэ? Энд $S(n)$ нь n натурал тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

Хариу: 2029 ширхэг тоо бий.

n тоо 5 буюу түүнээс дээш оронтой байж болохгүй. Жишээ нь 5 оронтой $n = \overline{abcde}$ тооны хувьд

$$n - S(n) > 10000 - 5 \cdot 9 = 99945$$

байна. Иймд $n = \overline{abcd}$ гэж үзэж болно. $n < 2000$ нь бодлогын нөхцөл хангах тоо байх нь ойлгомжтой. Иймд зөвхөн $a = 2$ байх тоонуудыг тоолоход хангалттай. Учир нь $a > 2$ үед

$$n - S(n) > 3000 - 4 \cdot 9 = 2964$$

юм. Түүнчлэн

$$n - S(n) = 2000 + 100b + 10c + d - (2 + b + c + d) = 1998 + 99b + 9c < 2019$$

буюу

$$99b + 9c < 21$$

тул $b = 0$, $c = 0, 1, 2$ байна. Тохиолдол бүрд d нь 10 боломжтой тул $a = 2$ байх 30 ширхэг тоо байна. Иймд нийт $1999 + 30 = 2029$ ширхэг тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 7-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 150 мин (2 цаг 30 мин)

1. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2018^2, 2019^2$ гэсэн тоонууд дотор аравтын орны цифр нь сондгой байдаг хэдэн тоо байх вэ?

Хариу: 404 тоо.

$A = \overline{ab\ldots cd} = \overline{ab\ldots c} \cdot 10 + d$ болог. Тэгвэл

$$A^2 = (10k + d)^2 = 20(5k^2 + kd) + d^2$$

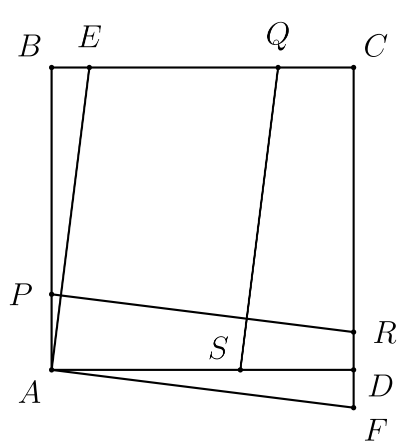
тул A^2 тооны 10-тын орны цифр нь сондгой байх бүрэн нөхцөл нь d^2-ийн аравтын орны цифр сондгой байх болно. Ийм байх хоёр л цифр байгаа. $d = 4$, $d = 6$. Эндээс 1-ээс 2019 хүртэлх тоонууд дотор 4 эсвэл 6 цифрээр төгссөн хэдэн тоо байгааг тоолоход хангалттай юм. $4, 14, 24, 34, \ldots, 2014$ дараалалд 202 ш тоо, $6, 16, 26, 36, \ldots, 2016$ дараалалд мөн 202 ш тоо нийт $202 + 202 = 404$ ширхэг тоо байна.

2. 2019×2019 хүснэгтийн бүх нүдэнд бүхэл тоонуудыг бичив. Эдгээр нь бүгд нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш байсан бол аль ч 2×2 ба 3×3 хүснэгт дотор бичигдсэн тоонуудын нийлбэр тэгтэй тэнцүү байж болох уу?

Хариу: Болно.

1	-1	1	-1	1	-1	$\ldots$
-1	1	-1	1	-1	1	$\ldots$
0	0	0	0	0	0	$\ldots$
1	-1	1	-1	1	-1	$\ldots$
-1	1	-1	1	-1	1	$\ldots$
0	0	0	0	0	0	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.



A-г дайрсан QS-тэй параллел шулуун BC шулуунтай E цэгт, A-г дайрсан PR-тай параллел шулуун CD шулуунтай F цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл $AS = EQ$, $AP = RF$ учраас $AP + AS + CQ + CR = EC + CF = 2a$ буюу $EC = 2a - CF$ болно. $BE = a - EC = a - (2a - CF) = CF - a = CF - CD = DF$, $AB = AD$, $\angle ABE = \angle ADF = 90°$ учраас $\triangle ABE = \triangle ADF$ болох ба $AE = AF$ байна. Эндээс $SQ = PR$ байна.

4. Цифр бүр нь өөртэйгээ тэнцүү удаа орсон 7 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Жишээ нь 1224444 тоонд 1 цифр 1 удаа, 2 цифр 2 удаа, 4 цифр 4 удаа орсон байна.

Хариу: 168

7 нь ялгаатай тоонуудын нийлбэрт $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 6 = 7$, $2 + 5 = 7$, $3 + 4 = 7$, $7 = 7$ гэж 4 янзаар задарна. Эхний тохиолдолд дөрвөн ширхэг 4 цифрийг $C_7^4 = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$, хоёр ширхэг 2 цифрийг $C_3^2 = 3$ янзаар, үлдэх нэг ширхэг 1 цифрийг 1 янзаар байрлуулах тул $35 \cdot 3 = 105$ боломж бий. $1 + 6 = 7$ бол нэг ширхэг 1 цифрийг 7 янзаар байрлуулна. $2 + 5 = 7$ гэвэл хоёр ширхэг 2 цифрийг $C_7^2 = 21$ янзаар байрлуулна. $3 + 4 = 7$ бол $C_7^3 = 35$ ширхэг тоо үүснэ. $7 = 7$ үед 7777777 гэсэн нэг ширхэг тоо байна. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах

$$105 + 7 + 21 + 35 = 168$$

ширхэг тоо байна.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 8-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 150 мин (2 цаг 30 мин)

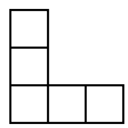
1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

Тэгш n-ийн хувьд сүүлийн цифр нь 3 юмуу 7 байна. Харин сондгой n-ийн хувьд 3-д хуваахад 2 үлдэгдэгдэл өгнө.

2. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

7.3 хар.

3. 8×8 хүснэгтийн нүднүүдийг улаан, хөх, шар өнгийн аль нэгээр будав.



Зурагт өгсөн булан дүрсийг хүснэгтийн хаана ч авсан түүний нүднүүд дотор дээрх 3 өнгөөр будагдсан нүднүүд олддог байхаар хүснэгтийг будах ялгаатай аргын тоог n гэе. Тэгвэл $n \geq 6^8$ гэдгийг батал.

5 нүдтэй булан дүрс 1×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийг агуулна. 8×8 хүснэгтийн дурын мөрийг өгөгдсөн 3 өнгөөр, уг мөрийн хаана ч 1×3 тэгш өнцөгт авахад тэгш өнцөгтийг 3 нүд өөр, өөр өнгөтэй байхаар будах ялгаатай аргын тоо 6-тай тэнцүү. Иймд

у х ш у х ш у х
у ш ч у ш х у ш
х у ш х у ш х у
х ш у х ш у х у
ш у ч ш у х ш у
ш х у ш х у ш х

Иймд 8×8 хүснэгтийн аль ч мөрийн 1×3 тэгш өнцөгтийн 3 нүд өөр, өөр өнгөтэй байхаар будах ялгаатай аргын тоо нь 6^8-тэй тэнцүү. Ийм будалт бодлогын нөхцөлийг хангах нь ойлгомжтой. Эндээс $n \geq 6^8$ болно.

4. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байж болох вэ?

9.3 бодлогыг хар.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 9-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 180 мин (3 цаг)

1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

8.1 хар.

2. $n = x + y + (x, y) + [x, y]$ байхаар x, y натурал тоо олддог бол n натурал тоог "сайн тоо" гэе. Эхний 2019 натурал тоон дотор хэдэн "сайн тоо" байгаа вэ? Энд (x, y)-ээр x, y тоонуудын ХИЕХ-г, $[x, y]$-ээр x, y тоонуудын ХБЕХ-г тэмдэглэв.

Хариу: 1008 сайн тоо бий.

Ерөнхий тохиолдолд $n > 2$, тэгш тоо бүр "сайн тоо" бөгөөд аливаа сондгой тоо сайн тоо болохгүй гэдгийг баталъя. Хэрэв x ба y нь тэгш сондгойгоороо ижил тоонууд байвал x, y, (x, y), $[x, y]$ тоонууд тэгш сондгойгоорой ижилхэн тоонууд байх тул тэдгээрийн нийлбэр тэгш тоо байна. Хэрэв x, y нь тэгш сондгойгоорой өөр, өөр тоонууд байвал (x, y) сондгой тоо, $[x, y]$ тэгш тоо тул x, y, (x, y), $[x, y]$ гэсэн 4 тооны яг 2 нь тэгш 2 нь сондгой тоо байна. Иймд эдгээрийн нийлбэр тэгш тоо. Түүнчлэн x, $y \geq 1$ гэдгээс $n \geq 4$ байх нь ойлгомжтой. Нөгөө талаас n нь 2-оос их дурын тэгш тоо бол $x = 1$, $y = \frac{n}{2} - 1$ гэж сонговол $(x, y) = 1$ ба $[x, y] = y = \frac{n}{2} - 1$ тул

$$x + y + (x, y) + [x, y] = n$$

болж 2-оос их тэгш тоо бүр "сайн тоо" болов.

3. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байж болох вэ?

Хариу: 999 тоо.

Хэрэв эдгээр 2000 тоон дотор хоорондоо ялгаатай 1000 тоо байдаг гэвэл тэдгээрийг

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{1000}$$

гэж эрэмбэлсэн гэе. Үлдсэн 1000 тоог мөн

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{1000}$$

гэж эрэмбэлье. Дараа нь

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{1000}, b_{1000})$$

гэж 1000 хос үүсгэе. Тэгвэл

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2 < \cdots < a_{1000} + b_{100}$$

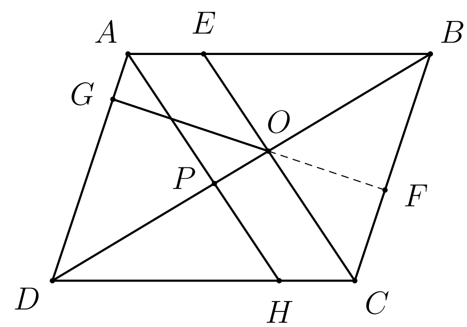
болоход хүрч зөрчилд хүрнэ. Иймд эдгээр 2000 тоон дотор 1000-аас цөөн тооны ялгаатай тоонууд байна. Харилцан ялгаатай тоонууд нийт 999 байж болох жишээ нь

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1002}, 2, 3, 4, \ldots, 998, 999$$

гэсэн 2000 тоо юм.

4. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE : EB = 1 : 3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF : FC = 3 : 2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG : GD = 1 : 4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

$EC \cap BD = O$ гэе.



A-г дайруулан EC-тэй параллел шулуун татъя. Энэ шулуун BD-тэй P цэгт, CD-тэй H цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл

$$\frac{OP}{OB} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$$

байна. Хэрэв $OP = x$ гэвэл $OB = 3x$ байна. $AECH$ параллелограмм учир $AE = CH$. Иймд $DH = EB$, $\measuredangle PHD = \measuredangle OEB$, $\measuredangle PDH = \measuredangle EBO$ учир $\triangle DPH = \triangle BOE$. Иймд $DP = OB = 3x$. Хэрэв $AG = y$ гэвэл $DG = 4y$ тул $BC = AD = 5y$ байна. Иймд $BF = 3y$, $FC = 2y$ болно.

$$\frac{DG}{BF} = \frac{4y}{3y} = \frac{4}{3}, \quad \frac{DO}{OB} = \frac{DP + OP}{OB} = \frac{3x + x}{3x} = \frac{4}{3}$$

$\measuredangle GDO = \measuredangle OBF \Rightarrow \triangle DGO \sim \triangle BFO \Rightarrow \measuredangle GOD = \measuredangle BOF$ учраас G, O, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 10-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 180 мин (3 цаг)

1. $a^3+b^3+c^3=3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}\geq\frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}=\frac{1}{3}\left(3-\frac{a^4}{a^4+3}-\frac{b^4}{b^4+3}-\frac{c^4}{c^4+3}\right)\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^4}{a^4+3}+\frac{b^4}{b^4+3}+\frac{c^4}{c^4+3}\leq\frac{3}{4}$$

болохыг батлахад хангалттай.

$a>0$ бол $\dfrac{a^4}{a^4+3}\leq\dfrac{a^3}{4}$ гэдгийг баталъя. Энэ нь $4a\leq a^4+3$ гэсэн илэрхий тэнцэтгэл биштэй эквивалент юм. $(a^4+3=a^4+1+1+1\geq 4\sqrt[4]{a^4\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=4a)$

Эндээс

$$\frac{a^4}{a^4+3}+\frac{b^4}{b^4+3}+\frac{c^4}{c^4+3}\leq\frac{a^3+b^3+c^2}{4}=\frac{3}{4}$$

болж бодлого бодогдоно. Баталгааны явцаас өгөгдсөн тэнцэтгэл бишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл $a=b=c=1$ болно.

2. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE:EB=1:3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF:FC=3:2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG:GD=1:4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

9.4 хар.

3. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1,S_2,S_3,S_4,S_5, баганууддад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр S_6,S_7,S_8,S_9,S_{10} бологы. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг "шидэт биш квадрат" гэе. Шидэт биш квадратад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Хариу: 48.

$S_1,S_2,\ldots,S_{10}\geq 5$ байх нь ойлгомжтой. Эдгээр тоонууд бүгд ялгаатай гэдгээс $\{S_1,S_2,\ldots,S_{10}\}$ олонлогийн байж болох "хамгийн бага" хувилбар нь $\{5,6,\ldots,13,14\}$ юм. ($S_1+S_2+\cdots+S_{10}$ нийлбэрийн хамгийн бага утгатай байх хувилбар). Хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэрийг S гэе. Тэгвэл

$$S=\frac{1}{2}\cdot(S_1+S_2+\cdots+S_{10})\geq\frac{1}{2}(5+6+\cdots+14)=\frac{1}{2}\cdot 95=47\frac{1}{2}$$

болж $S\geq 48$ болно. Одоо $S=48$ байх жишээ дурдахад хангалттай. Тухайлбал

1	1	1	1	1
1	1	1	2	2
1	1	2	3	3
1	2	2	3	3
2	3	3	3	4

4. $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ байг. Ямар нэг натурал тоо n-ийн хувьд $f(n)$ нь яг 6 ялгаатай натурал тоон хуваагчтай бол $n^3 - n + 1$ нь натурал тооны квадрат болохыг батал.

$f(1) = 3$, $f(2) = 49$ тоонууд яг 6 ялгаатай натурал тоон хуваагчгүй. Иймд $n \geq 3$. Яг 6 ялгаатай натурал тоон хуваагчтай тоо нь p^5 эсвэл p^2q (энд p, q - ялгаатай анхны тоонууд) хэлбэртэй болохыг хялбархан харж болно. Түүнчлэн

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)$$

байна. $(n^3 - n + 1, n^2 + n + 1) = d$ гэе. Тэгвэл

$$d \mid (n - 2) = (n - 1)(n^2 + n + 1) - (n^3 - n + 1)$$

бөгөөд эндээс

$$d \mid (n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 2) = 7$$

болж $d = 1$ эсвэл $d = 7$ байна.

а) $d = 1$ байг.

Энэ тохиолдолд $f(n)$-ийн нэг үржигдэхүүн p^2-тай нөгөө нь q-тэй тэнцүү байх ба

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

гэдгээс $n^3 - n + 1 = p^2$ байхаас аргагүй болж батлах зүйл гарна.

б) $d = 7$ байг.

Энэ тохиолдолд $7^2 \mid f(n)$ болж $f(n) = 7^2q$ эсвэл $f(n) = 7^5$ болно. (энд $q \neq 7$ анхын тоо!)

(б1) $f(n) = 7^2q$ байвал түүний үржигдэхүүнд 7 ба $7q$ байхаас аргагүй.

(б2) $f(n) = 7^5$ байвал түүний үржигдэхүүнд 7 ба 7^4 болж аль ч тохиолдолд (n^2+n+1) ба n^3-n+1 үржигдэхүүнүүдийн аль нэг нь 7-той тэнцүү болно. Гэвч $n \geq 3$ үед ийм байх боломжгүй.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 11-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 210 мин (3 цаг 30 мин)

1. $a^3+b^3+c^3=3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд
$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}\geq\frac{3}{4}$$
тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

10.1-р бодлогыг хар.

2. a_n дараалал $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$ рекуррент томьёогоор өгөгдөв. Хэрэв $a_1=1$, $a_{2018}=3$ бол a_{2019} хэдтэй тэнцүү вэ?

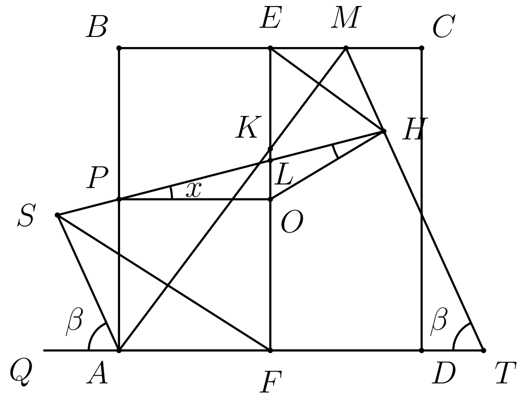
$a_2=x$ гэе. Тэгвэл
$$\begin{aligned}
a_3&=\frac{x+1}{1}=x+1,\\
a_4&=\frac{x+1+1}{x}=\frac{x+2}{x},\\
a_5&=\frac{\frac{x+2}{x}+1}{x+1}=\frac{2}{x},\\
a_6&=\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{x+2}{x}}=1\\
a_7&=\frac{1+1}{\frac{2}{x}}=x
\end{aligned}$$
буюу a_n дараалал 5 үетэй болов. $a_{2018}=a_3=x+1=3\Rightarrow x=2$ ба
$$a_{2019}=a_4=\frac{2+2}{2}=2$$

3. Урдаасаа болон ардаасаа ижилхэн уншигддаг натурал тоог "толин тоо" гэе. (палиндром тоо) Жишээлбэл 12321, 2004002 толин тоонууд. 9 оронтой m гэсэн тоог баруунаас зүүн тийш урвуу эрэмбээр бичихэд гарах 9 оронтой тоог n гэе. Хэрэв mn үржвэр толин тоо бөгөөд оронгийн тоо нь сондгой бол m-ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Хариу: $m=220000001$

$m=\overline{a_8a_7\dots a_0}$, $n=\overline{a_0a_1\dots a_8}$ ба $a_8,a_0\neq 0$ болог. mn үржвэр сондгой оронтой тоо гэдгээс түүний оронгийн тоо 17-той тэнцүү.
$$mn=\overline{b_{16}b_{15}\dots b_1b_0}$$
болог. Энд $b_{16}=b_0$, $b_{15}=b_1,\dots,b_9=b_7$ юм. Түүнчлэн
$$b_k=a_0a_{8-k}+a_1a_{9-k}+\dots+a_{k-1}a_7+a_ka_8,\ k=0,1,\dots,8\quad(*)$$
болохыг хялбархан харж болно. $(*)$-оос
$$b_8=a_0^2+\dots+a_8^2$$
ба $b_8\leq 9$ гэдгээс m-ийн аль ч цифр 2-оос ихгүй. Эндээс m тооны бичлэгт хамгийн олондоо 2 ширхэг 2-ийн цифр л орж болно. $a_0>0$ тул $a_0=1$, $a_k=0$, $k=1,2,\dots,6$ гэсэн хамгийн их утгатай байж болно. Энэ тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

4. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E, AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF-тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E-тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.



AB-ийн дундажийг P гэе. $PH \cap EF = L$ байг. $MH \cap AD = T$ гэе. A-г дайрсан MH-тай параллел шулуун PH-тай S цэгт огтлолцдог байг. $\measuredangle HPO = \measuredangle PHO = x$, $\measuredangle MTA = \measuredangle SAQ = \beta$ гэе.

$$\measuredangle HSA = \beta + x, \measuredangle SPA = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x,$$

$$\measuredangle EOH = 180^\circ - \measuredangle EMH = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta.$$

$\triangle PHO$-ийн өнцгүүдийн нийлбэр

$$2x + \beta + 90^\circ = 180^\circ.$$

Эндээс $\beta = 90^\circ - 2x$.

$$\measuredangle HSA = \beta + x = 90^\circ - 2x + x = 90^\circ - x = \measuredangle SPA \Rightarrow SA = PA = AF$$

$EM = MH$ ба $\measuredangle EMH = 180^\circ - \beta = \measuredangle SAF \Rightarrow SF \parallel EH$.

$$\Rightarrow \triangle SLF \sim \triangle HLE \Rightarrow \frac{SF}{EH} = \frac{FL}{LE}$$

$$\triangle SAF \sim \triangle HME \Rightarrow \frac{SF}{EH} = \frac{AF}{EM} = \frac{FK}{KE}$$

Эндээс $\dfrac{FL}{LE} = \dfrac{FK}{KE} \Rightarrow K \equiv L$.

Дүүргийн математикийн олимпиад, 12-р анги, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 210 мин (3 цаг 30 мин)

1. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E, AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF-тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E-тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.

11.4 хар.

2. $(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Хэрэв
$$(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$$
бол
$$(2020 - 56\sqrt{1301})^m = (56 - 2020\sqrt{1301})^n$$
биелэнэ. Гэтэл энэ тэнцэлийн зүүн гар талын модуль нь 1-ээс бага, баруун гар талын модуль нь 1-ээс их юм.

3. n өгөгдсөн натурал тоо байг. Тэгвэл дараах хоёр нөхцөлийг хангах (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2), \ldots$ сөрөг биш бүхэл тоон гуравт хамгийн олондоо хэдэн ширхэг байж болох вэ?

   (1) Аливаа i дугаарын хувьд $x_i + y_i + z_i = n$ байна.

   (2) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $y_1, y_2, y_3, \ldots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $z_1, z_2, z_3, \ldots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй.

Ийм s ширхэг гуравт байдаг гэе. Тэгвэл нэг талаас
$$S = \sum_{i=1}^{s}(x_i + y_i + z_i) = sn$$
ба нөгөө талаас
$$S_1 = \sum_{i=1}^{s} x_i, S_2 = \sum_{i=1}^{s} y_i, S_3 = \sum_{i=1}^{s} z_i$$
нийлбэрүүд дор хаяж $0 + 1 + 2 + \cdots + (s-1)$ ба $S = S_1 + S_2 + S_3$ тул
$$3 \cdot \frac{(s-1)s}{2} \leq sn$$
болно. $s \leq \dfrac{2n}{3} + 1$ болох ба s бүхэл тоо тул $s \leq \left[\dfrac{2n}{3}\right] + 1$ байна. Одоо $s = \left[\dfrac{2n}{3}\right] + 1$ болох жишээ байгуулъя.

Хэрвээ $n = 3k$ бол $s = 2k + 1$ байна. Энэ тохиолдолд
$$(0, k, 2k), (2, k-1, 2k-1), (4, k-2, 2k-2), \ldots, (2k, 0, k)$$
$$(1, 2k, k-1), (3, 2k-1, k-2), (5, 2k-2, k-3), \ldots (2k-1, k+1, 0).$$

Хэрвээ $n = 3k + 1$ бол $s = 2k + 1$ байна. Өмнөх жишээний гуравтуудын эхний координатыг 1, 1-ээр ихэсгэвэл хүссэн гуравтуудыг өгнө.

Хэрвээ $n = 3k - 1$ бол $s = 2k$ байна. Өмнөх жишээний гуравтуудын эхний координатыг 1, 1-ээр багасгахад хамгийн эхний гуравтаас бусад нь сөрөг биш эерэг тоо тул $2k$ ширхэг гуравт оршин байна. Иймд хамгийн олондоо $\left[\dfrac{2n}{3}\right] + 1$ ширхэг гуравт болов.

4. $f(x)$ функц $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй бөгөөд аливаа бодит тоо x-ийн хувьд

$$20f(19x) = f(x) + x^2$$

тэнцэтгэл биелдэг бол $f(x) < \dfrac{x}{2019}$ тэнцэтгэл бишийн бүх бүхэл шийдийг ол.

Хариу: $x = 1, 2, 3$

$x = 0 \Rightarrow 20f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ болно. Эндээс $f(x)$ нь $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй тул $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. $f(19x) = \dfrac{1}{20} \cdot f(x) + \dfrac{1}{20} \cdot x^2$ ба $x \mapsto \dfrac{x}{19}$ гэвэл

$$f(x) = \frac{1}{20} \cdot f\left(\frac{x}{19}\right) + \frac{1}{20} \cdot \frac{x^2}{19^2} \quad (*)$$

болно. $(*)$ тэнцэтгэлд $x \mapsto \dfrac{x}{19}$ гэсэн орлуулга хийе. Тэгвэл

$$f\left(\frac{x}{19}\right) = \frac{1}{20} \cdot f\left(\frac{x}{19^2}\right) + \frac{1}{20} \cdot \frac{x^2}{19^4} \quad (*_1)$$

$x \mapsto \dfrac{x}{19}$ гэвэл

$$f\left(\frac{x}{19^2}\right) = \frac{1}{20} \cdot f\left(\frac{x}{19^3}\right) + \frac{1}{20} \cdot \frac{x^2}{19^6} \quad (*_2)$$

гэх мэтээр

$$f\left(\frac{x}{19^{n-1}}\right) = \frac{1}{20} \cdot f\left(\frac{x}{19^n}\right) + \frac{1}{20} \cdot \frac{x^2}{19^{2n}} \quad (*_{n-1})$$

болно.

$(*_1)$-ийг $\dfrac{1}{20}$-ээр, $(*_2)$-ийг $\dfrac{1}{20^2}$-ээр гэх мэтээр $(*_{n-1})$-ийг $\dfrac{1}{20^{n-1}}$-ээр тус тус үржүүлэхэд гарсан тэнцэтгэлүүдээ нэмбэл

$$f(x) = \frac{1}{20^n} \cdot f\left(\frac{x}{19^n}\right) + x^2 \cdot \left(\frac{1}{20 \cdot 19^2} + \frac{1}{(20 \cdot 19^2)^2} + \cdots + \frac{1}{(20 \cdot 19^2)^n}\right)$$

болох ба $n \to \infty$ үед хязгаарт шилжвэл

$$f(x) = 0 \cdot f(0) + x^2 \cdot \frac{\dfrac{1}{20 \cdot 18^2}}{1 - \dfrac{1}{20 \cdot 18^2}} = \frac{x^2}{7219}$$

болов. Эндээс

$$f(x) < \frac{x}{2019} \Leftrightarrow x \cdot \left(x - \frac{7210}{2019}\right) < 0$$

ба энэ тэнцэтгэл бишийн бүхэл шийдүүд $x = 1, 2, 3$ болно.

Дүүргийн математикийн олимпиад, Бага ангийн багш, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 150 мин (2 цаг 30 мин)

1. Ямар нэг n натурал тооны хувьд $m = n - S(n)$ гэж бичигдэх m натурал тоог "сайн тоо" гэж нэрлэе. 2019-өөс хэтрэхгүй хэчнээн ширхэг сайн тоо байх вэ? Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр.

Хариу: 202 ширхэг тоо.

5 буюу түүнээс дээш оронтой тооноос цифрүүдийнх нь нийлбэрийг хасахад 2019-ээс их тоо гарах нь ойлгомжтой юм. Иймд зөвхөн 4 ба түүнээс цөөн оронтой тоонуудыг авч үзэхэд хангалттай. $m = n - S(n)$ ба $n = \overline{abcd}$ гэвэл $m = 999a + 99b + 9c$ болно. Энд $a \in \{0, 1, 2\}$ ба $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ байна.

$$m = 999a + 99b + c = 999a' + 99b' + 9c'$$

бол $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ байх нь ойлгомжтой. $a = 0 \vee 1$ үед b, c нь тус бүр 10 боломжтой ба үүнээс $a = b = c = 0$ үед натурал тоо үүсэхгүй тул нийт $2 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 199$ ширхэг сайн тоо байна. Харин $a = 2$ үед $m \leq 2019$ байхын тулд $b = 0$, $c = 0, 1, 2$ байх тул 3 ширхэг сайн тоо байна. Иймд нийт 202 ширхэг сайн тоо байна.

2. Аль ч хоёрынх нь нийлбэр ялгавартаа хуваагддаг, 2019 ширхэг натурал тоо оршин байх уу?

Ийм тоонуудыг индукцээр байгуулж болно. $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангах тоонууд байг.

$$N = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

гэвэл

$$N, a_1 + N, a_2 + N, \dots, a_n + N$$

тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана. Учир нь $a_i \mid N$ тул N, $a_i + N$ тоонуудын хувьд $a_i \mid a_j + 2N$; $a_j - a_i \mid a_i + a_j$, $a_j - a_i \mid N$ тул $a_i + N$, $a_j + N$ тоонуудын хувьд $a_j - a_j \mid a_i + a_j + 2N$ юм.

3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

7.3 хар

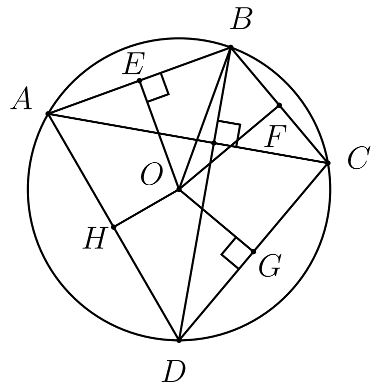
4. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ болог. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг "шидэт биш квадрат" гэе. Шидэт биш квадратад бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

10.3 хар

Дүүргийн математикийн олимпиад, Дунд ангийн багш, 2019.10.19

Бодох хугацаа: 210 мин (3 цаг 30 мин)

1. O төвтэй тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд хоорондоо перпендикуляр байв. AB талын дундаж E, BC талын дундаж F, CD талын дундаж G, AD талын дундаж H бол
$$2(OE+OF+OG+OH)=AB+BC+CD+DA$$
гэж батал.



$\measuredangle EOB=\measuredangle ADB$, $\measuredangle DOG=\measuredangle DAC$, $BD\perp AC$ учир $\measuredangle ADB+\measuredangle DAC=90°$. Эндээс $\measuredangle EOB=\measuredangle ODG$, $\measuredangle DOG=\measuredangle EBO$, $OB=OD$ учраас $\triangle EBO=\triangle DGO$. Иймээс $OG=EB=\dfrac{AB}{2}\Rightarrow AB=2OG$. Үүнтэй төстэйгээр $BC=2OH$, $CD=2OE$, $DA=2OF$. Эдгээрийг нэмбэл
$$2(OE+OF+OG+OH)=AB+BC+CD+DA$$
болно.

2. $(2020+56\sqrt{1301})^m=(56+2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Хэрэв
$$(2020+56\sqrt{1301})^m=(56+2020\sqrt{1301})^n$$
бол
$$(2020-56\sqrt{1301})^m=(56-2020\sqrt{1301})^n$$
биелэнэ. Гэтэл энэ тэнцэлийн зүүн гар талын модуль нь 1-ээс бага, баруун гар талын модуль нь 1-ээс их юм.

3. $56(x^2+y^2+z^2)+(77-x-2y+4z)^2\geq 4312$ тэнцэтгэл бишийг батал.

$77-x-2y+4z=t$ байх үед $56(x^2+y^2+z^2)+(77-x-2y+4z)^2$ илэрхийллийн хамгийн бага утгыг олъё. $(0,0,0)$ цэгээс
$$-x-2y+4z+77-t=0$$
хавтгай хүртэлх зай
$$d(t)=\frac{|77-t|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|77-t|}{\sqrt{21}}$$

нөгөө талаас координатын эхээс $77 - x - 2y + 4z = t$ байх аливаа (x, y, z) цэг хүртэлх зай $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ нь $d(t)$-ээс багагүй байх нь ойлгомтой. Иймд

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(77-t)^2}{21}$$

байна. Иймд

$$56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq \frac{56}{21}(77-t)^2 + t^2$$

баруун гар талаас уламжлал авч минимум цэгийг нь олбол

$$\frac{112}{21}(t - 77) + 2t = 0 \Rightarrow t = 56$$

болно. Иймд

$$56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq \frac{56}{21}(77-56)^2 + 56^2$$

буюу

$$56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq 56 \cdot 77 = 4312$$

болж батлагдав. Координатын эхийг шүргэлтийн цэгтэй холбоход $77 - x - 2y + 4z = t$ хавтгайн нормал гарч байх ёстой тул шүргэлтийн цэг нь $(-s, -2s, 4s)$ координаттай байх ба $t = 56$ үед

$$77 + s + 4s + 16s = 56 \Rightarrow s = -1$$

буюу $(x, y, z) = (1, 2, -4)$ үед тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ.

4. $u_1 = v_1 = 1$ ба

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

гэж тодорхойлогдсон u_n, v_n дарааллуудын ерөнхий гишүүний томьёог ол.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ гэвэл

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

тул

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

байна.

A матрицын хувийн утгууд нь

$$\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-x)(4-x) - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$$

ба харгалзах хувийн векторууд нь $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ буюу

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

тул

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

болно. Эндээс

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

ба

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

болно. Иймд

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

болохыг тооцвол

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{n-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 5^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 5^{n-1} & -2^{n-1} + 5^{n-1} \\ -2^n + 2 \cdot 5^{n-1} & 2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

болно. Иймд $(*)$-оос

$$u_n = \frac{2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1}}{3},$$

$$v_n = \frac{-2^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1}}{3}$$

болно.